Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
Астраханской области «Астраханский колледж вычислительной техники»

К О М П Л Е К С

МЕТОДИЧЕСКИХ РЕКОМЕНДАЦИЙ
по проведению лабораторных работ

по ЕН.04 *Численные методы в программировании*

по специальности *09.02.03*
Программирование
в компьютерных системах

АКВТ.09.02.03.ЛР46.0000

Листов: *153*

2018

ПРЕДИСЛОВИЕ

Методические указания предназначены для реализации государственных требований к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах при очной форме обучения, по учебной дисциплине Численные методы в программировании, в условиях действия государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Созданный методический комплекс по лабораторным работам направлен на:

– Обобщение, систематизацию, углубление теоретических знаний по следующим темам учебной дисциплины Численные методы в программировании: «Уточнение корней, методом проб. Метод хорд. Метод Ньютона (касательных)», «Способы задания функции. Интерполяционный многочлен Лагранжа», «Конечные разности. Интерполяционные формулы Ньютона», «Численное интегрирование. Простейшие квадратурные формулы. Обобщенная формула Ньютона-Котеса. Квадратурная формула Гаусса», «Формулы приближенного дифференцирования, основанные на интерполяционной формуле Ньютона», «Понятие о дифференциальном уравнении. Метод последовательного приближения. Численное интегрирование дифференциальных уравнений. Метод Эйлера. Метод Рунге-Кутта. Экстраполяционный метод Адамса».

– Формирование умений применять полученные теоретические знания в практической деятельности.

– Развитие аналитических, проектировочных, конструктивных умений.

– Выработку самостоятельности, ответственности, точности и творческой инициативы.

В процессе проведения лабораторных работ студенты выполняют одну или несколько лабораторных работ (заданий) в соответствии с изучаемым содержанием учебного материала по дисциплине «Численные методы в программировании». В ходе выполнения лабораторных работ у студентов формируются практические умения и навыки обращения с различным лабораторным оборудованием, а также исследовательские умения (создавать, форматировать информацию, используя прикладные программы, наблюдать, сравнивать, анализировать, устанавливать зависимости, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследования, оформлять результаты).

Содержание и количество часов лабораторных работ определено в рабочей программе данной учебной дисциплины. Лабораторные работы как вид учебного занятия проводиться в специально оборудованных лабораториях – ВЦ.

Необходимые структурные элементы лабораторной работы:

1) инструктаж, проводимый преподавателем;
2) самостоятельная деятельность студентов;
3) обсуждение итогов выполнения лабораторной работы.

Перед выполнением лабораторной работы проводится проверка знаний студентов – их теоретической готовности к выполнению задания, в виде вводного контроля.

Лабораторные работы, представленные в данном комплексе, носят и репродуктивный, и частично-поисковый, и поисковый характер. При групповой форме организации занятий одна и та же работа выполняется бригадами по 2 – 3 человека. Результаты выполнения лабораторных работ оформляются студентами в виде отчета.

ПРАВИЛА ПРОВЕДЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Перед выполнением лабораторных работ по дисциплине студенты должны:

– строго выполнить весь объем домашней подготовки, т.е. ознакомиться с теоретическим материалом, указанный в описаниях соответствующих лабораторных работ;

– знать, что выполнению каждой работы предшествует проверка готовности студента, которая производиться преподавателем;

– знать, что после выполнения работы группа студентов, которая назначается преподавателем на весь период работы, должна представить отчёт о проделанной работе с обсуждением полученных результатов и выводов;

– ознакомиться с требованиями и процедурами выставления окончательной оценки (зачёта) по работе и порядок выполнения пропущенных работ по уважительным и неуважительным причинам.

1 Решение нелинейных уравнений методом проб

1 Цель работы

1.1 Научиться отделять графическим методом корни нелинейных уравнений.
1.2 Научиться уточнить корни уравнений на отрезке методом половинного деления.
1.3 Научиться использовать пакет MathCad для решения нелинейных уравнений.

2 Приборы и оборудования

2.1 ПК IBM PC
2.2 Математический пакет MathCad

3 Порядок выполнения работы

3.1 Используя математическом пакете MathCad графическим методом определить корни уравнений.
3.2 Отделить отрезок для одного из корней и уточнить его методом половинного деления (проб).
3.3 Вычисления вести с тремя знаками после запятой. Варианты заданий приведены в приложение Б.

4 Содержание отчета

4.1 Цель работы
4.2 Выполнение задания
4.3 Вывод о проделанной работе
4.4 Контрольные вопросы

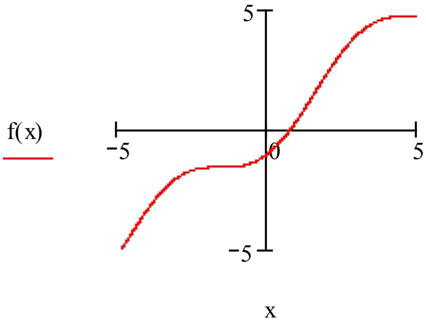
5 Контрольные вопросы

5.1 Какие уравнения называются алгебраическими, а какие трансцендентными?
5.2 Что является решением уравнений?
5.3 В чем заключается задача отделения корней? Какие методы отделения корней вы знаете?
5.4 Что такое уточнить корень уравнения? Какие методы уточнения корней вы знаете?
5.5 В чем заключается идея метода половинного деления (проб), хорд, Ньютона (касательных)?
5.6 Когда завершается процесс уточнения корней?
5.7 Как в MathCad реализовано нахождения корней уравнения графическим методом?
5.8 Как в MathCad получить аналитическое выражение первой и второй производных?
5.9 Как записываются формулы хорд и касательных для вычисления приближенных значений корней уравнения в MathCad?

Пример решения заданий

Решить уравнение y=x-cos(x)

$$f(x) := x - \cos(x)$$



корень уравнения x=0,74
находится на отрезке [0,1]

Метод проб (половинного деления)

$a := 0$ $b := 1$ $f(a) = -1$ $f(b) = 0.46$ $c := \frac{b+a}{2}$ $c = 0.5$ $f(c) = -0.378$

$a := 0.5$ $b := 1$ $f(a) = -0.378$ $f(b) = 0.46$ $c := \frac{b+a}{2}$ $c = 0.75$ $f(c) = 0.018$

$a := 0.5$ $b := 0.75$ $f(a) = -0.378$ $f(b) = 0.018$ $c := \frac{b+a}{2}$ $c = 0.625$ $f(c) = -0.186$

$a := 0.625$ $b := 0.75$ $f(a) = -0.186$ $f(b) = 0.018$ $c := \frac{b+a}{2}$ $c = 0.688$ $f(c) = -0.085$

$a := 0.688$ $b := 0.75$ $f(a) = -0.085$ $f(b) = 0.018$ $c := \frac{b+a}{2}$ $c = 0.719$ $f(c) = -0.033$

$a := 0.719$ $b := 0.75$ $f(a) = -0.033$ $f(b) = 0.018$ $c := \frac{b+a}{2}$ $c = 0.734$ $f(c) = -0.008$

$a := 0.734$ $b := 0.75$ $f(a) = -0.009$ $f(b) = 0.018$ $c := \frac{b+a}{2}$ $c = 0.742$ $f(c) = 0.005$

$a := 0.734$ $b := 0.742$ $f(a) = -0.009$ $f(b) = 0.005$ $c := \frac{b+a}{2}$ $c = 0.742$ $f(c) = 0.005$

$a := 0.738$ $b := 0.742$ $f(a) = -0.002$ $f(b) = 0.005$ $c := \frac{b+a}{2}$ $c = 0.74$ $f(c) = 0.002$

x=0.74

Приложение Б

Варианты заданий

Номер варианта	Уравнения 1	Уравнения 2
1	$2\cdot x^2+5\cdot x-3$ $x^3-3\cdot x-8$	$\cos(x+0.5)-x^3$ $x-\sin(x)+5$
2	$2\cdot x^2-0.5\cdot x-3$ $x^3-3\cdot x^2+6\cdot x+3$	$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-0.5\cdot x$ $3\cdot x-\cos(x)-1$
3	$x^4-18\cdot x^2+6$ $x^3-2.2\cdot x^2+0.4\cdot x-1.5$	$2\cdot e^x+5\cdot x$ $x\cdot\log(x)-1.2$
4	$x^4-x^3-2\cdot x^2+3\cdot x-3$ $x^3-3\cdot x^2+9\cdot x+2$	$5\cdot\sin(x)-x$ $1.8\cdot x^2-\sin(10\cdot x)$
5	$x^2+2\cdot x-1$ $x^3+1.5\cdot x^2+0.5\cdot x-1.2$	$2\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-0.5\cdot x^2+1$ $x^2-20\cdot\sin(x)$
6	$3\cdot x^4-8\cdot x^3-18\cdot x^2+2$ $x^3+3\cdot x+1$	$x^2-30\cdot\sin(x)$ $2\cdot x-\log(x)-7$
7	$2\cdot x^3-9\cdot x^2-60\cdot x-1$ $x^3+4\cdot x^2+0.5\cdot x-2$	$2\cdot\log(x)-\frac{x}{2}+1$ $3\cdot x-\cos(x)-1$
8	$5\cdot x^2-3\cdot x-3$ $x^3-3\cdot x^2+9\cdot x-9$	$(x-4)^2\cdot\ln(x-3)+1$ $0.5^x-5-(x+2)^2$
9	x^2+x-5 $x^3-3\cdot x^2+9\cdot x-8$	$(x-1.5)^2\cdot\log(x+11)-1$ $5^x+3\cdot x$
10	$3\cdot x^2+2\cdot x-2$ $x^3-2\cdot x^2+3\cdot x-1.2$	$\sin(x+1)-0.5\cdot x$ $2^x+5\cdot x-3$

Приложение В

Теоретические сведения

Методы решения нелинейных уравнений

Алгебраические и трансцендентные уравнения

При решении практических задач часто приходится сталкиваться с решением уравнений. Всякое уравнение с одним неизвестным можно представить в виде

$$\varphi(x) = g(x), \quad (1)$$

где $\varphi(x)$ и $g(x)$ — данные функции, определенные на некотором числовом множестве X, называемом областью допустимых значений уравнения,

Уравнение с одним неизвестным можно записать в виде

$$f(x)=0. \quad (2)$$

Действительно, перенеся $g(x)$ в левую часть уравнения (1), имеем уравнение $\varphi(x)-g(x) = 0$, равносильное (1). Если обозначить левую часть последнего уравнения через $f(x)$, то получаем уравнение (2).

Совокупность значений переменной x, при которых уравнение (1) превращается в тождество, называется решением этого уравнения, а каждое значение x из этой совокупности называется корнем уравнения.

Например, уравнение $x^2 = 2 - x$ имеет корни $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$. Подставив - 2 и 1 в заданное уравнение вместо x получим тождества: $(-2)^2 = 2 - (-2)$, т. е. $4 \equiv 4$; $1^2 = 2-1$, т. е. $1 \equiv 1$.

Решить уравнение — значит найти множество всех корней этого уравнения. Оно может быть конечным или бесконечным. Так, рассмотренное выше уравнение имеет два корня. Уравнение $\sin x = 0$ имеет решение $x = \pi n (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Придавая n различные значения, получаем бесконечное множество корней.

Совокупность нескольких уравнений с несколькими неизвестными называют системой уравнений (неизвестное, обозначенное одной и той же буквой в каждом из уравнений, должно означать одну и ту же неизвестную величину.

Решением системы уравнений с несколькими неизвестными называется совокупность значений этих неизвестных, обращающая каждое уравнение системы в тождество.

Например, система

$$\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ x + y^2 = 3 \end{cases}$$

имеет решение x = 2, y = 1, так как при этих значениях неизвестных уравнения системы обращаются в тождества: $4 + 1 \equiv 5$, $2 + 1 \equiv 3$.

Решить систему уравнений — значит найти множество всех ее решений или показать, что она решений не имеет.

В зависимости от того, какие функции входят в уравнения (1) или (2), уравнения разделяются на два больших класса: алгебраические и трансцендентные.

Функция называется алгебраической, если для получения значения функции по данному значению x нужно выполнить арифметические операции и возведение в степень с рациональным показателем. (Операция извлечения корня может быть представлена как операция возведения в степень с показателем $1/n$.)

Алгебраическая функция называется рациональной относительно переменной x, если над x не производится никаких других действий, кроме сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень.

Например:

$$f_1(x) = x^3 + 15x^2 - 1200x + 4; \quad f_2(x) = \frac{2}{x-8} + \frac{45}{x+5};$$

$$f_3(x) = (x-4)(x+5); \quad f_4(x) = \frac{3}{x+7} + \frac{4x+3}{3x^2+5}.$$

Если в рациональную функцию переменная x не входит в качестве делителя или не входит в выражение, являющееся делителем, то такая функция называется целой рациональной.

Например, следующие функции:

1) $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ (n— натуральное число или нуль, $a_0, a_1, ..., a_n$ — любые действительные числа, причем $a_0 \neq 0$);

2) $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x+8}{3}$

являются целыми рациональными. Целая рациональная функция определена на всей числовой оси.

Если в рациональной функции хотя бы один раз встречается деление на переменную x или переменная x входит в выражение, являющееся делителем, то такая функция называется дробно-рациональной. Такова, например, функция

$$y = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n},$$

где m — натуральное число или нуль; n — натуральное число; $a_0, a_1, ..., b_0, b_1, ...$ — любые действительные числа ($a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$). Дробно-рациональная функция определена на всей числовой оси, за исключением тех точек, в которых знаменатель обращается в нуль.

Функция называется иррациональной, если для получения значения функции по данному значению x нужно выполнить, кроме четырех арифметических действий (всех или некоторых), еще и извлечение корня. При этом функция будет иррациональной лишь тогда, когда аргумент x стоит под знаком радикала.

Так, функция

$$y = \frac{3x^3 - 4x + \sqrt[3]{x-1}}{7x-4}$$

является иррациональной, а функция

$$y = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{5}}{2}x + 4}$$

иррациональной не является, поскольку x не стоит под знаком радикала.

Выше указывалось, что все рациональные и иррациональные функции относятся к классу алгебраических функций.

Другой большой класс функций — трансцендентные функции. К ним относятся все неалгебраические функции: показательная a^x, логарифмическая $\log_a x$, тригонометрические $\sin x$, $\cos x$, $tg\, x$, $ctg\, x$, обратные тригонометрические $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctg\, x$, $arcctg\, x$ и др.

Если в запись уравнения входят только алгебраические функции, то уравнение называется алгебраическим,

Например, уравнения

$$x^5 - 4 = 0, \ x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 1 = 0$$

являются алгебраическими.

Алгебраическое уравнение может быть приведено к виду

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0. \ (3)$$

Поэтому, когда говорят «алгебраическое уравнение», то обычно имеют в виду уравнение вида (3).

Если уравнение (3) получено преобразованием уравнения, в которое входила дробная рациональная 'или иррациональная функция, то необходимо учитывать, что эти функции определены не на всей числовой оси.

Например, уравнение

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{6-x}=3$$

после освобождения от иррациональности примет вид

$$4x^2-16x-47=0.$$

Однако первоначальное уравнение определено не на всей числовой оси, а для *x*, принадлежащих отрезку [2, 6].

Числа $a_0, a_1, ..., a_n$ называются коэффициентами уравнения (3), они могут быть как действительными, так и комплексными. В дальнейшем изложении будут рассматриваться алгебраические уравнения вида (3) только с действительными коэффициентами.

Решение уравнения с одним неизвестным заключается в отыскании корней, т. е. тех значений *x*, которые обращают уравнение в тождество. Корни уравнения могут быть вещественными и невещественными (комплексными).

Найти точные значения корней уравнения можно только в исключительных случаях, обычно, когда есть какая-либо простая формула для вычисления значения корней, выражающая их через известные величины.

Так, для нахождения корней квадратного уравнения вида $x^2+px+q=0$ используется формула

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}. \quad (4)$$

Для решения кубического уравнения вида $x^3+px+q=0$ применяется формула

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Однако практическое применение этой формулы весьма затруднительно и требует использования комплексных чисел.

Для решения уравнения четвертой степени также существует формула, однако она является настолько сложной, что практически не применяется, и мы ее рассматривать не будем.

Норвежский математик Абель доказал, что при $n\geq 5$ не существует формулы, выражающей решение алгебраического уравнения (3) при помощи арифметических операций и извлечения корней. Лишь для некоторых частных случаев алгебраических уравнений, степень которых больше четырех, могут существовать формулы решения.

Кроме того, коэффициенты некоторых уравнений являются приближенными числами и, следовательно, вопрос о нахождении точных корней вообще не может быть поставлен.

Поэтому большое значение приобретают методы приближенного вычисления корней уравнения $f(x) = 0$.

При решении многих практических задач точное решение уравнения не всегда является необходимым. Задача нахождения корней считается решенной, если корни вычислены с заданной степенью точности.

Как же следует понимать утверждение «корень вычислен с заданной степенью точности»? Пусть ξ — корень уравнения, $\overline{x}$ —его приближенное значение с точностью до ε; это означает, что $|\xi-\overline{x}|\leq\varepsilon$. Если установлено, что искомый корень ξ заключен между числами a и b, т. е. a <ξ<b, причем b — a $\leq$e, то числа a и b — это приближенные значения

корня ξ соответственно с недостатком и с избытком с точностью до ε, так как $|\xi - a| < b - a \le \varepsilon$ и $|\xi - b| < b - a \le \varepsilon$. За приближенное значение корня ξ с точностью до ε можно принять любое число, содержащееся между a и b.

Например, если корень ξ заключен между 3,228 и 3,229 (т. е. 3,228 < ξ < 3,229), то за приближенное значение корня с точностью до 0,001 можно принять числа 3,228, 3,229 и любое число, заключенное между ними.

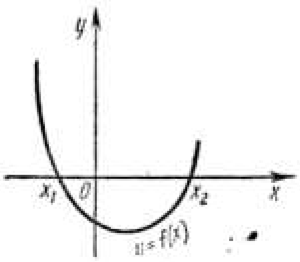
В настоящей главе мы будем рассматривать способы приближенного решения уравнений и систем уравнений. Некоторые из них одинаково применимы к отысканию корней как трансцендентных, так и алгебраических уравнений. Другие способы применимы только к алгебраическим уравнениям.

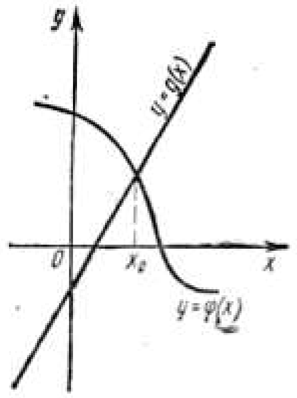
Графические методы решения уравнений

Графические методы решения уравнений. Одним из методов решения уравнений является графический. Точность такого решения невелика, однако с помощью графика можно разумно выбрать первое приближение, с которого начнется дальнейшее решение уравнения. Существуют два способа графического решения уравнений.

Первый способ. Все члены уравнения переносят в левую часть, т. е. представляют его в виде $f(x) = 0$. После этого строят график функции $y = f(x)$, где $f(x)$-левая часть уравнения. Абсцисы точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Оx и являются корнями уравнения, так как в этих точках y = 0 (рис. 3.1).

Второй способ. Все члены уравнения разбивают на две группы, одну из них записывают в левой части уравнения, а другую в правой, т. е. представляют его в виде $\varphi(x) = g(x)$. После этого строят графики двух функций $y = \varphi(x)$ и $y = g(x)$. Абсциссы точек пересечения графиков этих двух функций и служат корнями данного уравнения. Пусть точка пересечения графиков имеет абсциссу x_0, ординаты обоих графиков в этой точке равны между собой, т. е. $\varphi(x_0) = g(x_0)$. Из этого равенства следует, что x_0 — корень уравнения (рис. 3.2),





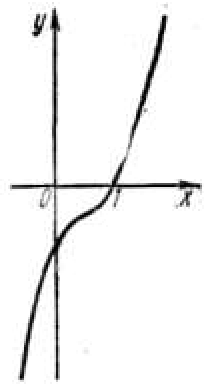


Рис. 3.1 Рис. 3.2 Рис. 3.3

Пример 1. Решить графически уравнение $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$.

Решение. Первый способ. Построим график функции $y = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ и определим абсциссы точек пересечения этого графика с осью Оx. Кривая пересекает ось Оx в точке x = 1, следовательно, уравнение имеет один корень (рис. 3.3). (Отметим, что алгебраическое уравнение третьей степени имеет или один действительный корень или три. Так как кривая пересекает ось абсцисс только в одной точке, то данное уравнение имеет только один действительный корень. Остальные два корня — комплексные.)

Второй способ. Представим данное уравнение в виде $x^3 = 2x^2 - 2x + 1$ и построим графики функций $y = x^3$ и $y = 2x^2 - 2x + 1$. Найдем абсциссу точки пересечения этих графиков; получим x = 1 (рис. 3.4).

Пример 2. Найти приближенно графическим способом корни уравнения

$\lg x - 3x + 5 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение следующим образом:

lg x = 3x — 5.

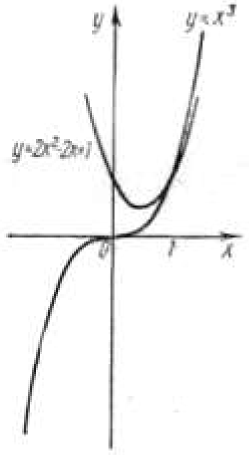
Функции в левой и в правой части уравнения имеют общую область определения: интервал $0 < x < +\infty$. Поэтому будем искать корни именно в этом интервале.

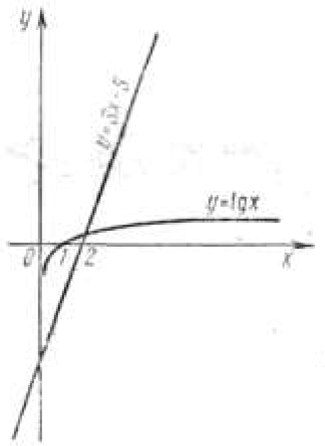
Строим графики функций y = lg x и y = 3x — 5 (рис. 3.5). Прямая y = 3x — 5 пересекает логарифмическую кривую в двух точках с абсциссами $x_1 \approx$ 0,00001 и $x_2 \approx$ 1,75. На рисунке трудно показать пересечение графиков этих двух функций в первой точке, однако, учитывая, что нижняя ветвь логарифмической кривой неограниченно приближается к оси O*y*, можно предполагать, что пересечение этих двух графиков произойдет вблизи точки пересечения графика функции y = 3x — 5 и оси O*y*. Абсцисса точки пересечения приближенно равна 0,00001. Итак, корни уравнения $x_1 \approx$ 0,00001 и $x_2 \approx$ 1,75.

Пример 3. Найти графически корни уравнения $2^x = 2x$.

Решение. Строим графики функций $y = 2^x$ и y = 2x. Эти графики пересекаются в двух точках, абсциссы которых равны $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Данное уравнение имеет два корня $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ (рис. 3.6).

Подводя итог вышеизложенному, можно рекомендовать для графического решения уравнения *f(x) = 0*, все корни которого лежат в промежутке [a, b], следующую простую схему.





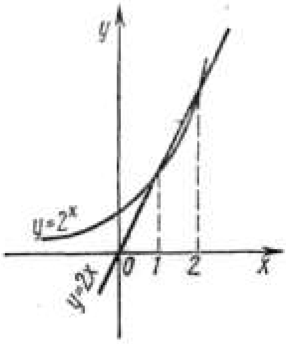


Рис. 3.4 Рис. 3.5 Рис. 3.6

1. Представить указанное уравнение в виде *φ(x)=g(x)* с таким расчетом, чтобы функции *y = φ(x)* и *y=g(x)* были просты и удобны для исследования и построения.

2. На миллиметровой бумаге вычертить графики функций *y = φ(x)* и *y = g (x)* в промежутке (a, b].

3. Если графики не пересекаются, то корней в данном промежутке нет. Если же графики пересекаются, то нужно определить точки их пересечения, найти абсциссы этих точек, которые и будут приближенными значениями корней рассматриваемого уравнения.

Отделение корней

В предыдущем параграфе был рассмотрен вопрос о графическом решении уравнений и систем уравнений. Однако даже при очень тщательном построении чертежа значения корней можно получить с небольшой степенью точности. Поэтому чтобы эти значения получить с любой заданной степенью точности, необходимо применять методы, Которые позволяют «уточнять» найденные значения.

Процесс нахождения приближенных значений корней уравнения разбивается на два этапа: 1) отделение корней; 2) уточнение корней до заданной степени точности.

В настоящем параграфе рассматривается первый этап — отделение корней.

Корень ξ уравнения *f(x) = 0* считается отделенным на отрезке [a, b], если на этом отрезке уравнение *f(x) = 0* не имеет других корней.

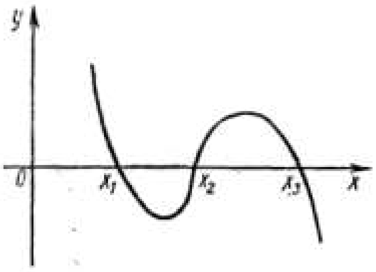


Рис 3.9

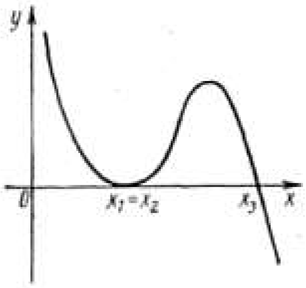


Рис. 3.10

Отделить корни — это значит разбить всю область допустимых значений на отрезки, в каждом из которых содержится один корень. Отделение корней можно произвести двумя способами — графическим и аналитическим.

Графический метод отделения корней. При графическом методе отделения корней поступают так же, как и при графическом методе решения уравнений.

Строят график функции y = f(x) для уравнения вида f (x) = 0 или представляют уравнение в виде φ(x) = g (x) и строят графики функций y = φ(x) и y = g (x). Значения действительных корней уравнения являются абсциссами точек пересечения графика функции y = f (x) с осью O*x* или абсциссами точек пересечения графиков функций y = φ(x) и y = g(x). Отрезки, в которых заключено только по одному корню, легко находятся.

Замечание. Пусть график функции y = f (x) имеет вид, изображенный на рис. 3.9. Кривая трижды пересекает ось абсцисс; следовательно, уравнение имеет три простых корня.

Если же кривая касается оси абсцисс (рис. 3.10), то уравнение имеет двукратный корень. Например, уравнение $x^3 — 3x + 2 = 0$ имеет три корня: $x_1 = -2$; $x_2 = x_3 = 1$ (рис. 3.11).

Если же уравнение имеет трехкратный действительный корень, то в месте касания с осью кривая y = f (x) имеет точку перегиба (рис. 3.12). Например, уравнение $x^3 — 3x^2 + 3x — 1 =0$ имеет трехкратный корень, равный единице (рис. 3.13).

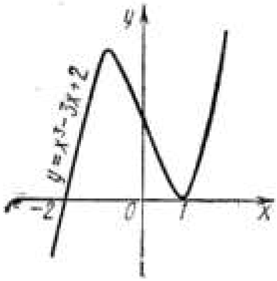
Графический метод отделения корней не обладает большой точностью. Он дает возможность грубо определить интервалы изоляции корня. Далее корни уточняются одним из способов, указанных ниже.

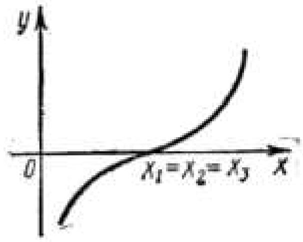
Аналитический метод отделения корней. Аналитически корни уравнения f(x) = 0 можно отделить, используя некоторые свойства функций, изучаемые в курсе математического анализа.

Сформулируем без доказательства теоремы, знание которых необходимо при отделении корней.

Теорема 1. Если функция f (x) непрерывна на отрезке [a, b] и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то внутри отрезка [a, b] существует по крайней мере один корень уравнения f(x) = 0.

Теорема 2. Если функция f(x) непрерывна и монотонна на отрезке [a, b] и принимает на концах отрезка значения разных знаков, то внутри отрезка [a, b] содержится корень уравнения f (x) = 0, и этот корень единственный.





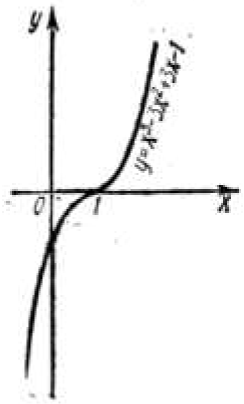


Рис. 3.11 Рис. 3.12 Рис. 3.13

Теорема 3. Если функция f (x) непрерывна на отрезке [a, b] и принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная *f'(x)* сохраняет постоянный знак внутри отрезка, то внутри отрезка существует корень уравнения f (x) = 0 и притом единственный.

Приведем теперь некоторые сведения из математического анализа, которые понадобятся в дальнейшем.

Если функция f(x) задана аналитически, то областью существования (областью определения) функции называется совокупность всех тех действительных значений аргумента, при которых аналитическое выражение, определяющее функцию, не теряет числового смысла и принимает только действительные значения.

Функция y = f(x) называется возрастающей, если с возрастанием аргумента значение функции увеличивается (рис. 3.14, а и б), и убывающей, если с возрастанием аргумента значение функции уменьшается (рис. 3.14, б и г).

Функция называется монотонной, если она в заданном промежутке либо только возрастает, либо только убывает.

Пусть на отрезке [a, b] функция f(x) непрерывна и принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная *f'(x)* сохраняет постоянный знак на интервале (a, b). Тогда если во всех точках интервала (a, b) первая производная положительна, т. е. f'(x) > 0, то функция f (x) в этом интервале возрастает (рис, 3.14, а и в).

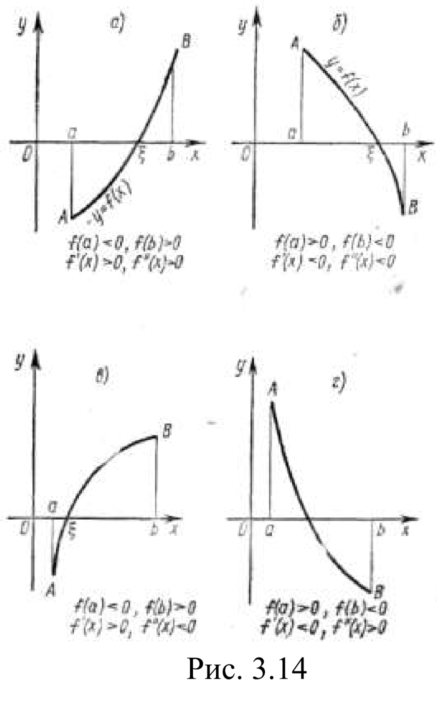


Рис. 3.14

Если же во всех точках интервала (a, b) первая производная отрицательна, т. е. *f' (x)* <0, то функция в этом интервале убывает (рис. 3.14, б и г). Корнем функции служит абсцисса точки пересечения графика функции f(x) с осью O*x*.

Пусть на отрезке [a, b] функция f(x) имеет производную второго порядка, которая сохраняет постоянный знак на всем отрезке. Тогда если f" (x) > 0, то график функции является выпуклым вниз (рис. 3.14, а и г); если же f"(x) < 0, то график функции является выпуклым вверх (рис. 3.14, б и е).

Точки, в которых первая производная функции равна нулю, а также те, в которых она не существует (например, обращается в бесконечность), но функция сохраняет непрерывность, называются критическими (этот признак является необходимым признаком экстремума).

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке всегда имеются точки, в которых она принимает наибольшее и наименьшее значения. Этих значений функция достигает или, в критических точках, или на концах отрезка. Следовательно, чтобы определить наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке, надо: 1) определить - критические точки функции; 2) вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка [a, b] 3) наибольшее из значений, найденных в п. 2), будет наибольшим, а наименьшее — наименьшим значением функции на отрезке.

В связи с вышеизложенным можно рекомендовать следующий порядок действий для отделения корней аналитическим методом.

1. Найти f'(x) — первую производную.

2. Составить таблицу знаков функции f(x), полагая x равным: а) критическим значениям (корням) производной или ближайшим к ним; б) граничным значениям (исходя из области допустимых значений неизвестного).

3. Определить интервалы, на концах которых функция принимает значения противоположных знаков. Внутри этих интервалов содержится по одному и только по одному корню.

Пример. Отделить корни уравнения 2^x — 5x — 3 = 0 аналитическим методом.

Решение. Обозначим f(x) = 2^x — 5* — 3. Область определения функции f(x) — вся числовая ось. Найдем первую производную

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 5.$$

Приравниваем эту производную нулю и вычисляем корень:

$$2^x \ln 2 - 5 = 0; \quad 2^x \ln 2 = 5; \quad 2^x = \frac{5}{\ln 2}; \quad x \lg 2 = \lg 5 - \lg \ln 2;$$

$$x = \frac{\lg 5 - \lg \ln 2}{\lg 2} = \frac{0,6990 + 0,1592}{0,3010} = \frac{0,8582}{0,3010} = 2,85$$

Составляем таблицу знаков функции f(x), полагая x равным: а) критическим значениям (корням производной) или ближайшим к ним; б) граничным значениям (исходя из области допустимых значений неизвестного):

x	- ∝	*2*	*3*	+ ∝
sign f_1(x)	+	—	—	+

Уравнение имеет два корня, так как происходят две перемены знака функции. Составим новую таблицу, с более мелкими интервалами изоляции корня:

x	— 1	0	1	2	3	4	5
sign f_1(x)	+	—	—	—	—	—	+

Корни уравнения заключены в промежутках (—1, 0) и (4, 5).

Уточнение корней. Метод проб

Предыдущий параграф был посвящен первому из этапов приближенного решения алгебраических и трансцендентных уравнений — Отделению корней.

Второй этап — уточнение корней, т. е, доведение их до заданной степени точности.

В настоящем параграфе рассматриваются некоторые способы уточнения корней, применяемые для решения как алгебраических, так и трансцендентных уравнений. Существуют, однако, приемы, которые применимы только для решения алгебраических уравнений. Их мы рассмотрим ниже.

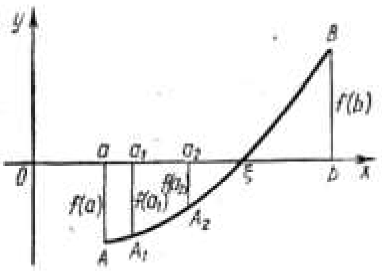


Рис 3.15

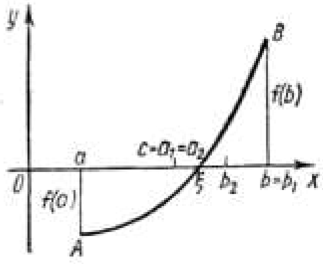


Рис. 3.16

Пусть дано уравнение f(x) =0, где f(x) — непрерывная функция, Требуется найти корень этого уравнения ξ с точностью до ε, где ε — некоторое положительное достаточно малое число.

Будем считать, что корень ξ отделен и находится на отрезке [a, b], т. е. имеет место неравенство $a \le \xi \le b$. Числа a и b — приближенные значения корня ξ соответственно с недостатком и с избытком. Погрешность этих приближений не превышает длины отрезка b — a. Если b — a ≤ ε, то необходимая точность вычислений достигнута, и за приближенное значение корня ξ можно принять либо a, либо b. Но если b — a > ε, то требуемая точность вычислений не достигнута и необходимо сузить интервал, в котором находится корень ξ, т. е. подобрать такие числа $\bar{a}$ и $\bar{b}$, чтобы выполнялись неравенства $a < \xi < b$ и $\bar{b} - \bar{a} < b - a$. При $\bar{b}$-$\bar{a} \le \varepsilon$ вычисления следует прекратить и за приближенное значение корня с точностью до ε принять либо $\bar{a}$, либо $\bar{b}$. Следует отметить, что значение корня будет более точным, когда за приближенное значение корня приняты не концы отрезка $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а середина этого отрезка, т. е. c= ($\bar{a}$ + $\bar{b}$)/2. Погрешность в этом случае не превышает величины ($\bar{b}$ —$\bar{a}$)/2.

Метод проб. Пусть дано уравнение f(x) = 0 [f(x) — непрерывная функция] и корень ξ отделен на отрезке [a, b], т. е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, причем b — a > ε. Требуется найти значение корня ξ с точностью до ε (рис. 3.15).

На отрезке [a, b] выберем произвольным образом точку a_1 которая разделит его на два отрезка [a, a_1] и [a_1, b]. Из этих двух отрезков следует выбрать тот, на концах которого функция принимает значения, противоположные по знаку. В нашем примере $f(a) \cdot f(a_1) < 0,\ f(a_1) \cdot f(b) < 0$, поэтому следует выбрать отрезок [a_1, b]. Затем на этом суженом отрезке опять произвольным образом возьмем точку a_2 и найдем знаки произведений $f(a_1) \cdot f(a_2)\, и\, f(a_2) \cdot f(b)$. Так как $f(a_2) \cdot f(b) < 0$, то выбираем отрезок [a_2, b]. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока длина отрезка, на котором находится корень, не станет меньше ε. Корень ξ получим как среднее арифметическое концов найденного отрезка, причем погрешность корня не превышает ε/2.

Метод проб в таком виде, как он описан выше, на ЭВМ не применяется. Для составления программ и расчетов на ЭВМ метод проб применяется в виде так называемого *метода половинного деления*.

Пусть корень ξ уравнения f (x) = 0 отделен и находится на отрезке [a, b], т. е. $f(a)\cdot f(b)<0$, причем b — a > ε [здесь f(x) — непрерывная функция]. Как и ранее, возьмем на отрезке [a, b] промежуточную точку, однако не произвольным образом, а так, чтобы она являлась серединой отрезка [a, b], т. е. c = (a + b)/2. Тогда отрезок [a, b] точкой c разделится на два равных отрезка [a, c] и [c, b], длина которых равна (b - a)/2 (рис. 3.16). Если f(c) = 0, то c — точный корень уравнения f(x) = 0. Если же f(c) $\neq 0$, то из двух образовавшихся отрезков [a, c] и [c, b] выберем тот, на концах которого функция f(x) принимает значения противоположных знаков; обозначим его $[a_1, b_1]$. Затем отрезок $[a_1, b_1]$ также делим пополам и проводим те же рассуждения. Получим отрезок $[a_2, b_2]$, длина которого равна $(b — a)/2^2$. Процесс деления отрезка пополам производим до тех пор, когда на каком-то n-м этапе либо середина отрезка будет корнем уравнения (случай, весьма редко встречающийся на практике), либо будет получен отрезок $[a_n, b_n]$ такой, что $b_n - a_n = (b-a)/2^n \le \varepsilon$ и $a_n \le \xi \le b_n$ (число n указывает на количество проведенных делений). Числа a_n и b_n — корни уравнения f(x) = 0 с точностью до ε. За приближенное значение корня, как указывалось, выше, следует взять $\xi = (a_n + b_n)/2$, причем погрешность не превышает $(b — a)/2^{n+1}$.

Пример 1. Методом проб уточнить до $\varepsilon = 10^{-3}$ меньший корень уравнения $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$.

Решение. Отделим корни этого уравнения аналитически. Функция f(x) определена на всей числовой оси. Приравняем *f'(x)* нулю и вычислим корень производной:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x;\ 3x^2 + 6x = 0; \qquad x(x+2) = 0;\ x_1 = 0,\ x_2 = -2.$$

Составляем таблицу знаков функции:

x	—∞	-2	-1	0	1	+∞
Sign f(x)	—	+	—	-	+	+

Видим, что первый корень содержится в интервале (— ∞ , — 2). Возьмем для пробы x = — 3 и найдем f(— 3) = — 3:

x	-3	-2	—1	0	1
sign f_1 (x)	-	+	-	-	+

Следовательно, корни уравнения $x^3 + 3x^2 — 3=0$ содержатся в интервалах (-3, -2); (-2,- 1); (0, 1).

Уточним меньший корень, лежащий в интервале (— 3, — 2), методом половинного деления. Для удобства вычислений составим таблицу (см. табл. 3.1). [Знаки « — » и « + » в верхних индексах a_n и b_n означают, что $f(a_n) <0$ и $f(b_n)>0$.]

Таблица 3.1

n	a_n^-	b_n^+	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	x_n^3	$3x_n^2$	$f(x_n)$

0	—3	—2	—2,500	—15,625	18,750	0,125
1	—3	—2,500	—2,750	—20,800	22,689	-1,111
2	—2,750	—2,500	—2,625	—17,990	20,670	—0,320
3	—2,625	—2,500	—2,563	—16,840	19,701	—0,139
4	—2,563	—2,500	—2,532	—16,230	19,233	0,003
5	—2,563	—2,532	—2,548	—16,540	19,479	—0,071
6	—2,548	—2,532	—2,540	—16,390 -	19,356	—0,034
7	—2,540	—2,532	—2,536	16,310	19,293	—0,014
8	—2,536	—2,532	—2,534	-16,270 —	19,263	—0,007
9	—2,534	—2,532	—2,533	16,250	19,248	—0,002
10	—2,533	—2,532				

Итак, корень уравнения $x_1 \approx 2{,}532$.

Пример 2. Отделить графически корень уравнения

$$x^2 \log_{0,5}(x+1) = 1.$$

Вычислить этот корень методом проб с точностью ε = 10^{-2}.

Решение. Представим уравнение в виде

$$\log_{0,5}(x+1) = \frac{1}{x^2}$$

и построим графики функций $y = \log_{0,5}(x+1)$ и $y = \dfrac{1}{x^2}$. Из рис. 3.17 видно,

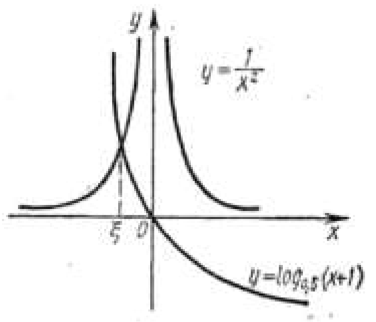


Рис. 3.17

что уравнение имеет один корень $x_1 \approx$—0,7. Определим знаки функции слева и справа от x_1:

x	-0,8	-0,5
sign f(x)	+	-

Для удобства расчетов перейдем к десятичным логарифмам:

$$f(x) = x^2 \cdot \frac{\lg(x+1)}{\lg 0{,}5} - 1 = x^2 \cdot \frac{\lg(x+1)}{-0{,}301} - 1.$$

Составим следующую таблицу (табл. 3.2):

Таблица 3.2

n	a_n^+	b_n^-	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	x_n^2	$\lg(x_n+1)$	$f(x_n)$

0	—0,8	—0,5 —	—0,65 —	0,4225	—0,4559	—0,360 —
1	-0,8	0,65 —	0,73 —	0,5329	—0,5686	0,0067 —
2	—0,73	0,65 —	0,69 —	0,4761	—0,5086	0,196 —
3	-0,73	0,69 -	0,71 —	0,5041	—0,5376	0,099 —
4	—0,73	0,71 —	0,72	0,5184	—0,5528	0,048
5	-0,73	0,72				

Итак, $x_1 \approx$ -0,73.

2 Решение нелинейных уравнений методом хорд

1 Цель работы

1.1 Научиться отделять графическим методом корни нелинейных уравнений

1.2 Научиться уточнить корни уравнений на отрезке методом хорд.

1.3 Научиться использовать пакет MathCad для решения нелинейных уравнений.

2 Приборы и оборудования

2.1 ПК IBM PC

2.2 Математический пакет MathCad

3 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

3.1 Используя математическом пакете MathCad графическим методом определить корни уравнений.

3.2 Отделить отрезок для одного из корней и уточнить его методом хорд.

3.3 Вычисления вести с тремя знаками после запятой. Варианты заданий приведены в приложение Б.

4 СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

4.1 Цель работы.

4.2 Выполнение задания.

4.3 Вывод о проделанной работе.

5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

5.1 Какие уравнения называются алгебраическими, а какие трансцендентными?

5.2 Что является решением уравнений?

5.3 В чем заключается задача отделения корней? Какие методы отделения корней вы знаете?

5.4 Что такое уточнить корень уравнения? Какие методы уточнения корней вы знаете?

5.5 В чем заключается идея метода половинного деления (проб), хорд, Ньютона (касательных)?

5.6 Когда завершается процесс уточнения корней?

5.7 Как в MathCad реализовано нахождения корней уравнения графическим методом?

5.8 Как в MathCad получить аналитическое выражение первой и второй производных?

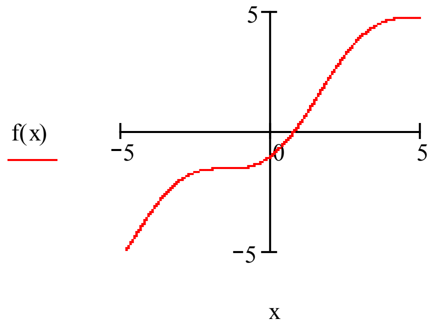
5.9 Как записываются формулы хорд и касательных для вычисления приближенных значений корней уравнения в MathCad?

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Решить уравнение y=x-cos(x)

$f(x) := x - \cos(x)$



корень уравнения x=0,74
находится на отрезке [0,1]

Первая производная $\frac{d}{dx}(x - \cos(x))$ $\quad f1(x) := 1 + \sin(x)$

Вторая производная $\frac{d}{dx}(1 + \sin(x))$ $\quad f2(x) := \cos(x)$

$a := 0 \quad b := 1 \quad x := \frac{b + a}{2} \quad x = 0.5 \quad f(a) \cdot f2(x) = -0.878$

$f(b) \cdot f2(x) = 0.403$

Метод хорд

$x_0 := a \quad n := 0..3$

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \cdot (b - x_n) \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.75 \\ 0.739 \\ 0.739 \\ 0.739 \end{pmatrix}$$

корень x=0,739

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Номер варианта	Уравнения 1	Уравнения 2
1	$2 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 3$ $x^3 - 3 \cdot x - 8$	$\cos(x + 0.5) - x^3$ $x - \sin(x) + 5$
2	$2 \cdot x^2 - 0.5 \cdot x - 3$ $x^3 - 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 3$	$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 0.5 \cdot x$ $3 \cdot x - \cos(x) - 1$
3	$x^4 - 18 \cdot x^2 + 6$ $x^3 - 2.2 \cdot x^2 + 0.4 \cdot x - 1.5$	$2 \cdot e^x + 5 \cdot x$ $x \cdot \log(x) - 1.2$
4	$x^4 - x^3 - 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 3$ $x^3 - 3 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 2$	$5 \cdot \sin(x) - x$ $1.8 \cdot x^2 - \sin(10 \cdot x)$
5	$x^2 + 2 \cdot x - 1$ $x^3 + 1.5 \cdot x^2 + 0.5 \cdot x - 1.2$	$2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 0.5 \cdot x^2 + 1$ $x^2 - 20 \cdot \sin(x)$
6	$3 \cdot x^4 - 8 \cdot x^3 - 18 \cdot x^2 + 2$ $x^3 + 3 \cdot x + 1$	$x^2 - 30 \cdot \sin(x)$ $2 \cdot x - \log(x) - 7$
7	$2 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 - 60 \cdot x - 1$ $x^3 + 4 \cdot x^2 + 0.5 \cdot x - 2$	$2 \cdot \log(x) - \frac{x}{2} + 1$ $3 \cdot x - \cos(x) - 1$
8	$5 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 3$ $x^3 - 3 \cdot x^2 + 9 \cdot x - 9$	$(x - 4)^2 \cdot \ln(x - 3) + 1$ $0.5^x - 5 - (x + 2)^2$
9	$x^2 + x - 5$ $x^3 - 3 \cdot x^2 + 9 \cdot x - 8$	$(x - 1.5)^2 \cdot \log(x + 11) - 1$ $5^x + 3 \cdot x$
10	$3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 2$ $x^3 - 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 1.2$	$\sin(x + 1) - 0.5 \cdot x$ $2^x + 5 \cdot x - 3$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Теоретические сведения

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Алгебраические и трансцендентные уравнения

При решении практических задач часто приходится сталкиваться с решением уравнений. Всякое уравнение с одним неизвестным можно представить в виде

$$\varphi(x) = g(x), \qquad (1)$$

где $\varphi(x)$ и $g(x)$ — данные функции, определенные на некотором числовом множестве X, называемом областью допустимых значений уравнения,

Уравнение с одним неизвестным можно записать в виде

$$f(x)=0. \qquad (2)$$

Действительно, перенеся $g(x)$ в левую часть уравнения (1), имеем уравнение $\varphi(x)-g(x) = 0$, равносильное (1). Если обозначить левую часть последнего уравнения через $f(x)$, то получаем уравнение (2).

Совокупность значений переменной x, при которых уравнение (1) превращается в тождество, называется решением этого уравнения, а каждое значение x из этой совокупности называется корнем уравнения.

Например, уравнение $x^2 = 2 - x$ имеет корни $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$. Подставив - 2 и 1 в заданное уравнение вместо x получим тождества: $(-2)^2 = 2 - (-2)$, т. е. $4 \equiv 4$; $1^2 = 2-1$, т. е. $1 \equiv 1$.

Решить уравнение — значит найти множество всех корней этого уравнения. Оно может быть конечным или бесконечным. Так, рассмотренное выше уравнение имеет два корня. Уравнение $\sin x = 0$ имеет решение $x = \pi n (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Придавая n различные значения, получаем бесконечное множество корней.

Совокупность нескольких уравнений с несколькими неизвестными называют системой уравнений (неизвестное, обозначенное одной и той же буквой в каждом из уравнений, должно означать одну и ту же неизвестную величину.

Решением системы уравнений с несколькими неизвестными называется совокупность значений этих неизвестных, обращающая каждое уравнение системы в тождество.

Например, система

$$\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ x + y^2 = 3 \end{cases}$$

имеет решение x = 2, y = 1, так как при этих значениях неизвестных уравнения системы обращаются в тождества: $4 + 1 \equiv 5$, $2 + 1 \equiv 3$.

Решить систему уравнений — значит найти множество всех ее решений или показать, что она решений не имеет.

В зависимости от того, какие функции входят в уравнения (1) или (2), уравнения разделяются на два больших класса: алгебраические и трансцендентные.

Функция называется алгебраической, если для получения значения функции по данному значению x нужно выполнить арифметические операции и возведение в степень с рациональным показателем. (Операция извлечения корня может быть представлена как операция возведения в степень с показателем *1/n*.)

Алгебраическая функция называется рациональной относительно переменной *x*, если над *x* не производится никаких других действий, кроме сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень.

Например:

$$f_1(x) = x^3 + 15x^2 - 1200x + 4; \quad f_2(x) = \frac{2}{x-8} + \frac{45}{x+5};$$

$$f_3(x) = (x-4)(x+5); \quad f_4(x) = \frac{3}{x+7} + \frac{4x+3}{3x^2+5}.$$

Если в рациональную функцию переменная *x* не входит в качестве делителя или не входит в выражение, являющееся делителем, то такая функция называется целой рациональной.

Например, следующие функции:

1) $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ (n— натуральное число или нуль, $a_0, a_1, ..., a_n$ — любые действительные числа, причем $a_0 \neq 0$);

2) $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x+8}{3}$

являются целыми рациональными. Целая рациональная функция определена на всей числовой оси.

Если в рациональной функции хотя бы один раз встречается деление на переменную *x* или переменная *x* входит в выражение, являющееся делителем, то такая функция называется дробно-рациональной. Такова, например, функция

$$y = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n},$$

где m — натуральное число или нуль; n — натуральное число; $a_0, a_1, ..., b_0, b_1, ...$ — любые действительные числа ($a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$). Дробно-рациональная функция определена на всей числовой оси, за исключением тех точек, в которых знаменатель обращается в нуль.

Функция называется иррациональной, если для получения значения функции по данному значению *x* нужно выполнить, кроме четырех арифметических действий (всех или некоторых), еще и извлечение корня. При этом функция будет иррациональной лишь тогда, когда аргумент *x* стоит под знаком радикала.

Так, функция

$$y = \frac{3x^3 - 4x + \sqrt[3]{x-1}}{7x-4}$$

является иррациональной, а функция

$$y = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{5}}{2}x + 4}$$

иррациональной не является, поскольку *x* не стоит под знаком радикала.

Выше указывалось, что все рациональные и иррациональные функции относятся к классу алгебраических функций.

Другой большой класс функций — трансцендентные функции. К ним относятся все неалгебраические функции: показательная a^x, логарифмическая $log_a x$, тригонометрические *sin x, cos x, tg x, ctg x*, обратные тригонометрические *arcsin x, arccos x, arctg x, arcctg x* и др.

Если в запись уравнения входят только алгебраические функции, то уравнение называется алгебраическим,

Например, уравнения

$$x^5 - 4 = 0,\ x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 1 = 0$$

являются алгебраическими.

Алгебраическое уравнение может быть приведено к виду

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0. \ (3)$$

Поэтому, когда говорят «алгебраическое уравнение», то обычно имеют в виду уравнение вида (3).

Если уравнение (3) получено преобразованием уравнения, в которое входила дробная рациональная 'или иррациональная функция, то необходимо учитывать, что эти функции определены не на всей числовой оси.

Например, уравнение

$\sqrt{x-2} + \sqrt{6-x} = 3$

после освобождения от иррациональности примет вид

$4x^2 - 16x - 47 = 0.$

Однако первоначальное уравнение определено не на всей числовой оси, а для x, принадлежащих отрезку [2, 6].

Числа $a_0, a_1, ..., a_n$ называются коэффициентами уравнения (3), они могут быть как действительными, так и комплексными. В дальнейшем изложении будут рассматриваться алгебраические уравнения вида (3) только с действительными коэффициентами.

Решение уравнения с одним неизвестным заключается в отыскании корней, т. е. тех значений x, которые обращают уравнение в тождество. Корни уравнения могут быть вещественными и невещественными (комплексными).

Найти точные значения корней уравнения можно только в исключительных случаях, обычно, когда есть какая-либо простая формула для вычисления значения корней, выражающая их через известные величины.

Так, для нахождения корней квадратного уравнения вида $x^2 + px + q = 0$ используется формула

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \ (4)$$

Для решения кубического уравнения вида $x^3 + px + q = 0$ применяется формула

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Однако практическое применение этой формулы весьма затруднительно и требует использования комплексных чисел.

Для решения уравнения четвертой степени также существует формула, однако она является настолько сложной, что практически не применяется, и мы ее рассматривать не будем.

Норвежский математик Абель доказал, что при $n \geq 5$ не существует формулы, выражающей решение алгебраического уравнения (3) при помощи арифметических операций и извлечения корней. Лишь для некоторых частных случаев алгебраических уравнений, степень которых больше четырех, могут существовать формулы решения.

Кроме того, коэффициенты некоторых уравнений являются приближенными числами и, следовательно, вопрос о нахождении точных корней вообще не может быть поставлен.

Поэтому большое значение приобретают методы приближенного вычисления корней уравнения *f(x) = 0*.

При решении многих практических задач точное решение уравнения не всегда является необходимым. Задача нахождения корней считается решенной, если корни вычислены с заданной степенью точности.

Как же следует понимать утверждение «корень вычислен с заданной степенью точности»? Пусть ξ — корень уравнения, $\bar{x}$ —его приближенное значение с точностью до ε; это означает, что $|\xi-\bar{x}|\leq\varepsilon$. Если установлено, что искомый корень ξ заключен между числами a и b, т. е. a <ξ<b, причем b — a ≤e, то числа a и b — это приближенные значения корня ξ соответственно с недостатком и с избытком с точностью до ε, так как $|\xi-a|<b-a\leq\varepsilon\, u\, |\xi-b|<b-a\leq\varepsilon$. За приближенное значение корня ξ с точностью до ε можно принять любое число, содержащееся между a и b.

Например, если корень ξ заключен между 3,228 и 3,229 (т. е. 3,228 < ξ < 3,229), то за приближенное значение корня с точностью до 0,001 можно принять числа 3,228, 3,229 и любое число, заключенное между ними.

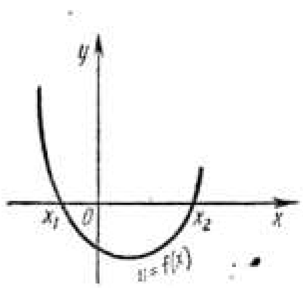
В настоящей главе мы будем рассматривать способы приближенного решения уравнений и систем уравнений. Некоторые из них одинаково применимы к отысканию корней как трансцендентных, так и алгебраических уравнений. Другие способы применимы только к алгебраическим уравнениям.

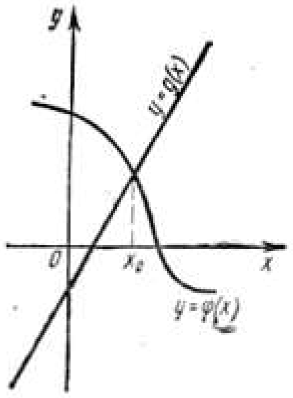
Графические методы решения уравнений

Графические методы решения уравнений. Одним из методов решения уравнений является графический. Точность такого решения невелика, однако с помощью графика можно разумно выбрать первое приближение, с которого начнется дальнейшее решение уравнения. Существуют два способа графического решения уравнений.

Первый способ. Все члены уравнения переносят в левую часть, т. е. представляют его в виде $f(x) = 0$. После этого строят график функции $y = f(x)$, где $f\ (x)$-левая часть уравнения. Абсцисы точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Оx и являются корнями уравнения, так как в этих точках y = 0 (рис. 3.1).

Второй способ. Все члены уравнения разбивают на две группы, одну из них записывают в левой части уравнения, а другую в правой, т. е. представляют его в виде $\varphi(x) = g\ (x)$. После этого строят графики двух функций $y = \varphi\ (x)$ и $y = g\ (x)$. Абсциссы точек пересечения графиков этих двух функций и служат корнями данного уравнения. Пусть точка пересечения графиков имеет абсциссу x_0, ординаты обоих графиков в этой точке равны между собой, т. е. $\varphi\ (x_0) = g\ (x_0)$. Из этого равенства следует, что x_0 — корень уравнения (рис. 3.2),





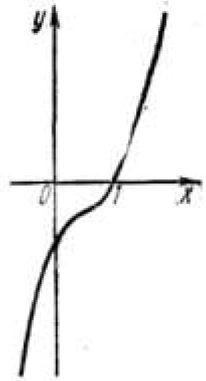


Рис. 3.1 Рис. 3.2 Рис. 3.3

Пример 1. Решить графически уравнение $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$.

Решение. Первый способ. Построим график функции $y = x^3 – 2x^2 + 2x — 1$ и определим абсциссы точек пересечения этого графика с осью Оx. Кривая пересекает ось Оx в точке x = 1, следовательно, уравнение имеет один корень (рис. 3.3). (Отметим, что алгебраическое уравнение третьей степени имеет или один действительный корень или три. Так как кривая пересекает ось абсцисс только в одной точке, то данное уравнение имеет только один действительный корень. Остальные два корня — комплексные.)

Второй способ. Представим данное уравнение в виде $x^3 = 2x^2 – 2x + 1$ и построим графики функций $y = x^3$ и $y = 2x^2 — 2x + 1$. Найдем абсциссу точки пересечения этих графиков; получим x = 1 (рис. 3.4).

Пример 2. Найти приближенно графическим способом корни уравнения

$\lg x - 3x + 5 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение следующим образом:

$\lg x = 3x — 5$.

Функции в левой и в правой части уравнения имеют общую область определения: интервал $0 < x < +\infty$. Поэтому будем искать корни именно в этом интервале.

Строим графики функций $y = \lg x$ и $y = 3x — 5$ (рис. 3.5). Прямая $y = 3x — 5$ пересекает логарифмическую кривую в двух точках с абсциссами $x_1 \approx 0{,}00001$ и $x_2 \approx 1{,}75$. На рисунке трудно показать пересечение графиков этих двух функций в первой точке, однако, учитывая, что нижняя ветвь логарифмической кривой неограниченно приближается к оси Оy, можно предполагать, что пересечение этих двух графиков произойдет вблизи точки пересечения графика функции у = 3х — 5 и оси Оy. Абсцисса точки пересечения приближенно равна 0,00001. Итак, корни уравнения $x_1 \approx$ 0,00001 и $x_2 \approx$ 1,75.

Пример 3. Найти графически корни уравнения $2^x = 2x$.

Решение. Строим графики функций $y = 2^x$ и $y = 2x$. Эти графики пересекаются в двух точках, абсциссы которых равны $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Данное уравнение имеет два корня $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ (рис. 3.6).

Подводя итог вышеизложенному, можно рекомендовать для графического решения уравнения $f(x) = 0$, все корни которого лежат в промежутке [a, b], следующую простую схему.

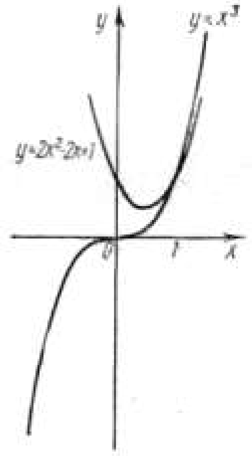


Рис. 3.4

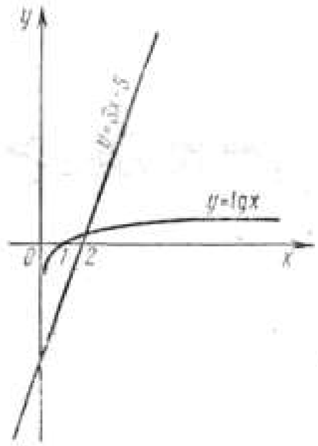


Рис. 3.5

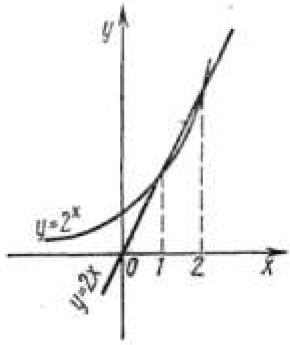


Рис. 3.6

1. Представить указанное уравнение в виде $\varphi(x)=g(x)$ с таким расчетом, чтобы функции $y = \varphi(x)$ и $y=g(x)$ были просты и удобны для исследования и построения.
2. На миллиметровой бумаге вычертить графики функций $y = \varphi(x)$ и $y = g(x)$ в промежутке (a, b].
3. Если графики не пересекаются, то корней в данном промежутке нет. Если же графики пересекаются, то нужно определить точки их пересечения, найти абсциссы этих точек, которые и будут приближенными значениями корней рассматриваемого уравнения.

Отделение корней

В предыдущем параграфе был рассмотрен вопрос о графическом решении уравнений и систем уравнений. Однако даже при очень тщательном построении чертежа значения корней можно получить с небольшой степенью точности. Поэтому чтобы эти значения получить с любой заданной степенью точности, необходимо применять методы, Которые позволяют «уточнять» найденные значения.

Процесс нахождения приближенных значений корней уравнения разбивается на два этапа: 1) отделение корней; 2) уточнение корней до заданной степени точности.
В настоящем параграфе рассматривается первый этап — отделение корней.
Корень ξ уравнения *f(x) = 0* считается отделенным на отрезке [a, b], если на этом отрезке уравнение *f(x) = 0* не имеет других корней.

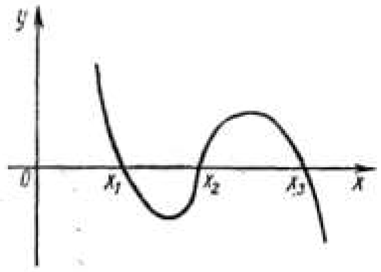


Рис 3.9

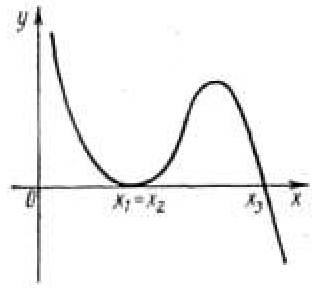
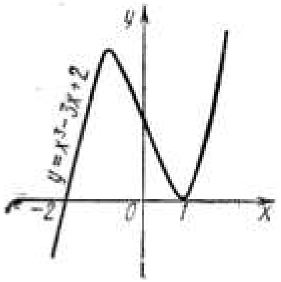


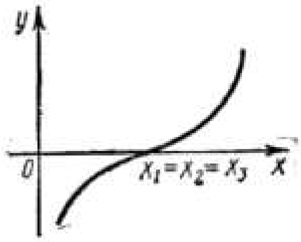
Рис. 3.10

Отделить корни — это значит разбить всю область допустимых значений на отрезки, в каждом из которых содержится один корень. Отделение корней можно произвести двумя способами — графическим и аналитическим.
Графический метод отделения корней. При графическом методе отделения корней поступают так же, как и при графическом методе решения уравнений. Строят график функции y = f(x) для уравнения вида f (x) = 0 или представляют уравнение в виде φ(x) = g (x) и строят графики функций y = φ(x) и y = g (x). Значения действительных корней уравнения являются абсциссами точек пересечения графика функции y = f (x) с осью O*x* или абсциссами точек пересечения графиков функций y = φ(x) и y = g(x). Отрезки, в которых заключено только по одному корню, легко находятся.
Замечание. Пусть график функции y = f (x) имеет вид, изображенный на рис. 3.9. Кривая трижды пересекает ось абсцисс; следовательно, уравнение имеет три простых корня.
Если же кривая касается оси абсцисс (рис. 3.10), то уравнение имеет двукратный корень. Например, уравнение $x^3 - 3x + 2 = 0$ имеет три корня: $x_1 = -2$; $x_2 = x_3 = 1$ (рис. 3.11).
Если же уравнение имеет трехкратный действительный корень, то в месте касания с осью кривая y = f (x) имеет точку перегиба (рис. 3.12). Например, уравнение $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ имеет трехкратный корень, равный единице (рис. 3.13).
Графический метод отделения корней не обладает большой точностью. Он дает возможность грубо определить интервалы изоляции корня. Далее корни уточняются одним из способов, указанных ниже.
Аналитический метод отделения корней. Аналитически корни уравнения f(x) = 0 можно отделить, используя некоторые свойства функций, изучаемые в курсе математического анализа.
Сформулируем без доказательства теоремы, знание которых необходимо при отделении корней.

Теорема 1. Если функция f (x) непрерывна на отрезке [a, b] и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то внутри отрезка [a, b] существует по крайней мере один корень уравнения f(x) = 0.

Теорема 2. Если функция f(x) непрерывна и монотонна на отрезке [a, b] и принимает на концах отрезка значения разных знаков, то





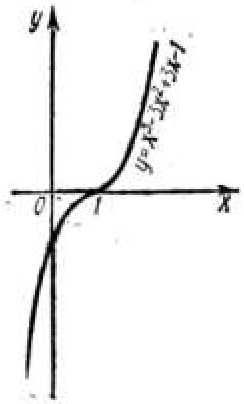


Рис. 3.11 Рис. 3.12 Рис. 3.13

внутри отрезка [a, b] содержится корень уравнения f (x) = 0, и этот корень единственный.

Теорема 3. Если функция f (x) непрерывна на отрезке [a, b] и принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная *f'(x)* сохраняет постоянный знак внутри отрезка, то внутри отрезка существует корень уравнения f (x) = 0 и притом единственный.

Приведем теперь некоторые сведения из математического анализа, которые понадобятся в дальнейшем.

Если функция f(x) задана аналитически, то областью существования (областью определения) функции называется совокупность всех тех действительных значений аргумента, при которых аналитическое выражение, определяющее функцию, не теряет числового смысла и принимает только действительные значения.

Функция y = f(x) называется возрастающей, если с возрастанием аргумента значение функции увеличивается (рис. 3.14, а и б), и убывающей, если с возрастанием аргумента значение функции уменьшается (рис. 3.14, б и г).

Функция называется монотонной, если она в заданном промежутке либо только возрастает, либо только убывает.

Пусть на отрезке [a, b] функция f(x) непрерывна и принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная *f'(x)* сохраняет постоянный знак на интервале (a, b). Тогда если во всех точках интервала (a, b) первая производная положительна, т. е. f'(x) > 0, то функция f (x) в этом интервале возрастает (рис, 3.14, а и в).

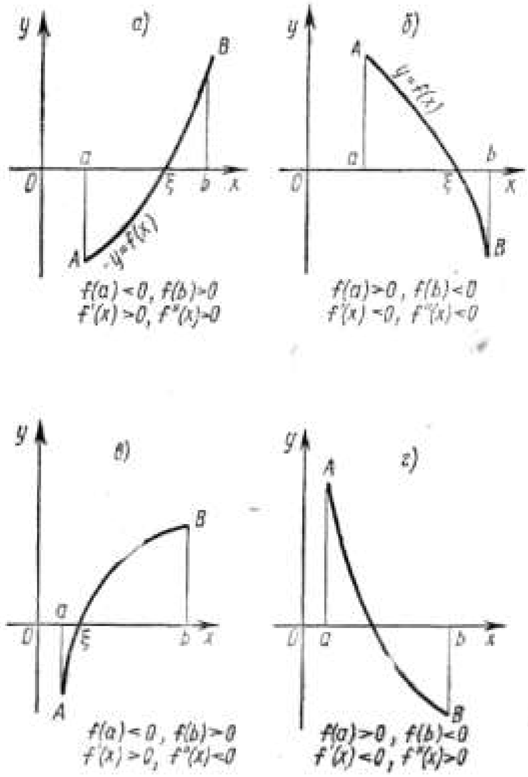


Рис. 3.14

Если же во всех точках интервала (a, b) первая производная отрицательна, т. е. $f'(x) < 0$, то функция в этом интервале убывает (рис. 3.14, б и г). Корнем функции служит абсцисса точки пересечения графика функции f(x) с осью O*x*.

Пусть на отрезке [a, b] функция f(x) имеет производную второго порядка, которая сохраняет постоянный знак на всем отрезке. Тогда если $f''(x) > 0$, то график функции является выпуклым вниз (рис. 3.14, а и г); если же $f''(x) < 0$, то график функции является выпуклым вверх (рис. 3.14, б и е).

Точки, в которых первая производная функции равна нулю, а также те, в которых она не существует (например, обращается в бесконечность), но функция сохраняет непрерывность, называются критическими (этот признак является необходимым признаком экстремума).

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке всегда имеются точки, в которых она принимает наибольшее и наименьшее значения. Этих значений функция достигает или, в критических точках, или на концах отрезка. Следовательно, чтобы определить наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке, надо: 1) определить - критические точки функции; 2) вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка [a, b] 3) наибольшее из значений, найденных в п. 2), будет наибольшим, а наименьшее — наименьшим значением функции на отрезке.

В связи с вышеизложенным можно рекомендовать следующий порядок действий для отделения корней аналитическим методом.

1. Найти $f'(x)$ — первую производную.

2. Составить таблицу знаков функции f(x), полагая x равным: а) критическим значениям (корням) производной или ближайшим к

ним; б) граничным значениям (исходя из области допустимых значений неизвестного).

3. Определить интервалы, на концах которых функция принимает значения противоположных знаков. Внутри этих интервалов содержится по одному и только по одному корню.

Пример. Отделить корни уравнения 2^x — 5x — 3 = 0 аналитическим методом.

Решение. Обозначим f(x) = 2^x — 5* — 3. Область определения функции f(x) — вся числовая ось. Найдем первую производную

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 5.$$

Приравниваем эту производную нулю и вычисляем корень:

$$2^x \ln 2 - 5 = 0; \quad 2^x \ln 2 = 5; \quad 2^x = \frac{5}{\ln 2}; \quad x \lg 2 = \lg 5 - \lg \ln 2;$$

$$x = \frac{\lg 5 - \lg \ln 2}{\lg 2} = \frac{0{,}6990 + 0{,}1592}{0{,}3010} = \frac{0{,}8582}{0{,}3010} = 2{,}85$$

Составляем таблицу знаков функции f(x), полагая x равным: а) критическим значениям (корням производной) или ближайшим к ним; б) граничным значениям (исходя из области допустимых значений неизвестного):

x	- ∝	*2*	*3*	+ ∝
sign $f_1(x)$	+	—	—	+

Уравнение имеет два корня, так как происходят две перемены знака функции. Составим новую таблицу, с более мелкими интервалами изоляции корня:

x	— 1	0	1	2	3	4	5
sign $f_1(x)$	+	—	—	—	—	—	+

Корни уравнения заключены в промежутках (—1, 0) и (4, 5).

Уточнение корней. Метод хорд

Метод хорд является одним из распространенных методов решения алгебраических и трансцендентных уравнений. В литературе он также встречается под названиями «метода ложного положения» (regula falsi), «метода линейного интерполирования» и «метода пропорциональных частей».

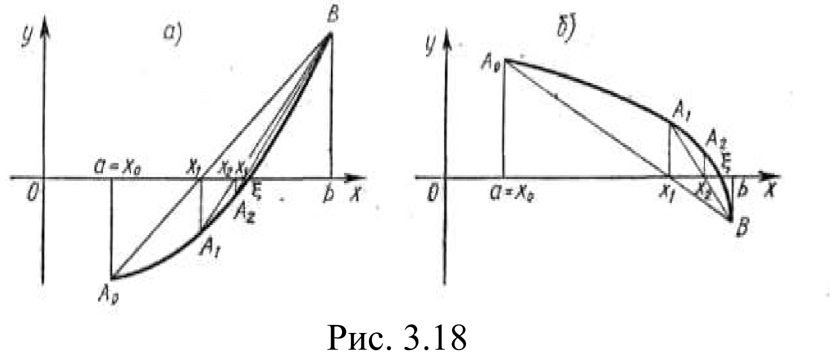


Рис. 3.18

Пусть дано уравнение f(x) = 0, где f(x) — непрерывная функция, имеющая в интервале (a, b) производные первого и второго порядков. Корень считается отделенным и находится на отрезке [a, b], т. е. $f(a)\cdot f(b)<0$.

Идея метода хорд состоит в том, что на достаточно малом промежутке [a, b] дуга кривой y = f (x) заменяется стягивающей ее хордой. В качестве приближенного значения корня принимается точка пересечения хорды с осью O*x*.

Ранее мы рассмотрели четыре случая расположения дуги кривой, учитывая значения первой и второй производных.

Рассмотрим случаи, когда первая и вторая производные имеют одинаковые знаки, т. е. $f'(x)\cdot f''(x)>0$.

Пусть, например, f(a) < 0, f(b) > 0, f' (x) > 0, f'' (x) > 0 (рис, 3.18, а). График функции проходит через точки A_0 (a; f (a)), B (b; f (b)). Искомый корень уравнения f (x) = 0 есть абсцисса точки пересечения графика функции y = f (x) с осью *Ox*. Эта точка нам неизвестна, но вместо нее мы возьмем точку x_1 пересечения хорды A_0B с осью *Ox*. Это и будет приближенное значение корня.

Уравнение хорды, проходящей через точки A_0 и B, имеет вид

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}$$

Найдем значение x = x_1 для которого y = 0:

$$x_1=a-\frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}.$$

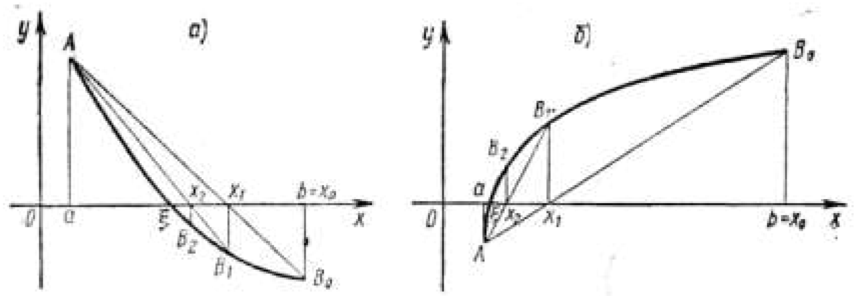


Рис. 3.19

Эта формула носит название формулы метода хорд. Теперь корень ξ находится внутри отрезка [x_1, b]. Если значение корня x_1 нас не устраивает, то его можно уточнить, применяя метод хорд к отрезку [x_1, b]. Соединим точку $A_1(x_1;\ f(x_1))$ с точкой B (b; f(b)) и найдем x_2 — точку пересечения хорды A_1B с осью *Ox*:

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)(b-x_1)}{f(b)-f(x_1)}.$$

Продолжая этот процесс, находим

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)(b-x_2)}{f(b)-f(x_2)}.$$

и вообще

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}. \qquad (2)$$

Процесс продолжается до тех пор, пока мы не получим приближенный корень с заданной степенью точности.

По приведенным выше формулам вычисляются корни и для случая, когда f(a) > 0, f (b) < 0, f'(x) < 0, f″(x) < 0 (рис 3.18, б).

Теперь рассмотрим случаи, когда первая и вторая производные имеют разные знаки, т. е. $f'(x) \cdot f''(x) > 0$.

Пусть, например, f(a) > 0, f(b) < 0, f' (x) < 0, f″(x) > 0 (рис. 3.19, а). Соединим точки A (a; f(a)) и B_0 (b; f (b)) и запишем уравнение хорды, проходящей через A и B_0:

$$\frac{y - f(b)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - b}{b - a}.$$

Найдем x_1 как точку пересечения хорды с осью *Ox*, полагая y == 0:

$$x_1 = b - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)}. \qquad (3)$$

Корень ξ теперь заключен внутри отрезка [a, x_1]. Применяя метод хорд к отрезку [a, x_1], получим

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - a)}{f(x_1) - f(a)}$$

и вообще

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)}. \qquad (4)$$

По этим же формулам находится приближенное значение корня и для случая, когда f (a) < 0, f(b) > 0, f′ (x) > 0, f″ (x) < 0 (рис. 3.19, б).

Итак, если f′ (x) • f″ (x) > 0, то приближенный корень вычисляется по формулам (1) и (2); если же f' (x) • f''(x) < 0, то — по формулам (3) и (4).

Однако выбор тех или иных формул можно осуществить, пользуясь простым правилом: неподвижным концом отрезка является тот, для которого знак функции совпадает со знаком второй производной.

Если f(b) • f'' (x) > 0, то неподвижен конец b, а все приближения к корню ξ лежат со стороны конца a [формулы (1) и (2)]. Если f(a) • f″(x) > 0, то неподвижен конец a, а все приближения к корню ξ лежат со стороны конца b [формулы (3) и (4)].

При оценке погрешности приближения можно пользоваться формулой

$$|\xi - x_n| < |x_n - x_{n-1}|, \qquad (5)$$

где ξ — точное значение корня, а x_{n-1} и x_n — приближения к нему, полученные на (n — 1)-м и n-м шагах. Однако эта формула справедлива лишь на достаточно малых отрезках. Ею можно пользоваться, если выполнено условие

$$M \le 2m, \qquad (6)$$

где

$$M = \underset{[a,b]}{\max}\left|f'(x)\right|, \quad m = \underset{[a,b]}{\min}\left|f'(x)\right|.$$

Пример 1. Методом хорд уточнить до ε == 0,001 меньший корень уравнения $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$. Корни уравнения отделены и меньший корень содержится на отрезке [— 3, —2] (см. пример 1 § 3.4).

Решение. Проверяем выполнение условия (6):

$$\left|f'(x)\right| = \left|3x^2 + 6x\right|;$$

$$M = \max_{[-3,\ -2]}\left|f'(x)\right| = \left|27 - 18\right| = 9; \quad m = \min_{[-3,\ -2]}\left|f'(x)\right| = \left|12 - 12\right| = 0;$$

$$M \nless 2m.$$

Возьмем середину отрезка [— 3, —2], т. е. точку x = — 2,5, и выберем интервал [— 3; — 2,5]. Проверяем выполнение условия (6):

$$M = \max_{[-3,\ -2,5]}\left|f'(x)\right| = 9; \quad m = \min_{[-3,\ -2,5]}\left|f'(x)\right| = 3,75; \ M \nless 2m.$$

Возьмем теперь середину отрезка [— 3; — 2,5] — точку x = — 2,75; f (— 2,75) < 0, f(— 2,5) > 0, f(— 3) < 0; выбираем отрезок [— 2,75; 2,5].

Находим

$$M = \max_{[-2,75,\ -2,5]}\left|f'(x)\right| = 6,189; \quad m = \min_{[-2,75,\ -2,5]}\left|f'(x)\right| = 3,75;$$

т. е. в этом случае выполнено условие $M < 2m.$.

Таким образом, для оценки погрешности корня, лежащего на отрезке [-2,75; -2,5], можно пользоваться формулой (5):

$$\left|\xi - x_n\right| < \left|x_n - x_{n-1}\right|,$$

т. е. процесс последовательного приближения к корню следует продолжать до тех пор, пока не будет выполнено условие $\left|x_n - x_{n-1}\right| \le \varepsilon$.

Определим знак второй производной и установим, по какой формуле надо производить вычисления. Находим $f''(x) = 6x + 6$; на отрезке [— 2,75; — 2,5] имеют место неравенства f(— 2,75) < 0, $f(-2,75)\cdot f''(x) > 0$. Значит, за неподвижный конец отрезка нужно принять x = — 2,75. Тогда вычисления следует вести по формулам (3) и (4);

$$x_1 = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b) - f(a)}; \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)},$$

где a = —2,75 и f(a) = — 1,111. Если последнее выражение представить в виде

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)},$$

то сразу же можно будет получать разность между двумя последовательными приближениями и производить проверку на окончание вычислений, т. е. проверять выполнение неравенства $\left|x_{n+1} - x_n\right| \le \varepsilon$.

Все вычисления удобно производить в следующей таблице

Таблица 3.3

n	x_n	x_n^3	x_n^2	$3x_n^2$	$f(x_n)=x_n^3+3x_n^2-3$	x_n-a	$-\frac{f(x_n)(x_n-a)}{f(x_n)-f(a)}$
0 1 2 3	—2,5 —2,525 —2,531 —2,5319	—15,625 —16,098 —16,213	6,250 6,3756 6,4060	18,75 19,1268 19,2180	0,125 0,0288 0,0050	0,25 0,225 0,219	—0,025 — 0,006 — 0,0009

Из табл. 3.3 видно, что $|x_3-x_2|<0{,}001$, поэтому округляя x_3 до тысячных долей, получим $\xi\approx$— 2,532.

Пример 2. Методом хорд уточнить до ε= 0,001 корень уравнения x - sinx = 0,25, заключенный на отрезке [0, π/2].

Решение. Запишем уравнение в виде x — sin x — 0,25 = 0 и определим f' (x) = 1 — cos x. Для проверки выполнения условия (6) составим вспомогательную таблицу, в первых двух столбцах которой указаны начало и конец выбранного интервала изоляции корня.

Таблица 3.4

a	b	Знаки f(a)	Знаки f(b)	M	m	Выполняется ли условие $M\le 2m$	$\frac{a+b}{2}$	Знак $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
0,00 0,785 0,785 0,982	1,57 1,57 1,178 1,178	- - - -	+ + + +	1,00 1,00 0,6172 0,6172	0 0,29251 0,2925 0,4446	нет нет нет да	0,785 1,178 0,982	- + -

Из последней строки табл. 3.4 видно, что на отрезке [0,982; 1,178] условие $M\le 2m$ выполняется. Следовательно, при оценке погрешности приближенного значения корня по методу хорд можно воспользоваться неравенством $|x_n-x_{n-1}|<\varepsilon$. Корень уравнения x — sin x — 0,25 =0 находится на отрезке [0,982; 1,178]. Определим знак второй производной внутри отрезка:

$f'(x)=1-\cos x;\quad f''(x)=\sin x>0.$

Если возвратиться к прежним обозначениям, то a = 0,982, b = 1,178. Знак второй производной совпадает со знаком функции в точке b. Следовательно, этот конец отрезка является неподвижным, а все приближения к корню лежат со стороны конца a. Для вычисления корня пользуемся формулами (1) и (2):

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b) - f(a)};$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)},$$

где b = 1,178, f (b) = 0,00416. Составим следующую таблицу (табл. 3.5):

Таблица 3.5

n	x_n	$-\sin x_n$	$f(x_n) = x_n - \sin x_n - 0,25$	$b - x_n$	$-\frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)}$
0	0,982	—0,83161	—0,09961	0,196	0,189
1	1,171	—0,92114	—0,00014	0,007	0,0002
2	1,1712				

Итак, x $\approx$ 1,171 с точностью до ε = 0,001.

3 Решение нелинейных уравнений методом касательных

1 Цель работы

1.1 Научиться отделять графическим методом корни нелинейных уравнений

1.2 Научиться уточнить корни уравнений на отрезке методом Ньютона (касательных).

1.3 Научиться использовать пакет MathCad для решения нелинейных уравнений.

2 Приборы и оборудования

2.1 ПК IBM PC

2.2 Математический пакет MathCad

3 Порядок выполнения работы

3.1 Используя математическом пакете MathCad графическим методом определить корни уравнений.

3.2 Отделить отрезок для одного из корней и уточнить его методом Ньютона (касательных).

3.3 Вычисления вести с тремя знаками после запятой. Варианты заданий приведены в приложение Б.

4 Содержание отчета

4.1 Цель работы.

4.2 Выполнение задания.

4.3 Вывод о проделанной работе.

5 Контрольные вопросы

5.1 Какие уравнения называются алгебраическими, а какие трансцендентными?

5.2 Что является решением уравнений?

5.3 В чем заключается задача отделения корней? Какие методы отделения корней вы знаете?

5.4 Что такое уточнить корень уравнения? Какие методы уточнения корней вы знаете?

5.5 В чем заключается идея метода половинного деления (проб), хорд, Ньютона (касательных)?

5.6 Когда завершается процесс уточнения корней?

5.7 Как в MathCad реализовано нахождения корней уравнения графическим методом?

5.8 Как в MathCad получить аналитическое выражение первой и второй производных?

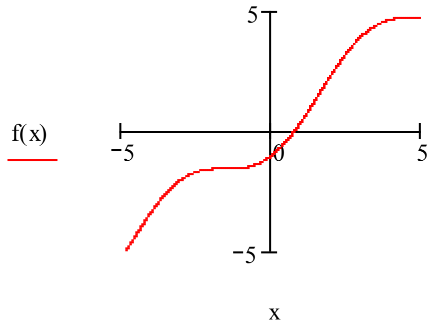
5.9 Как записываются формулы хорд и касательных для вычисления приближенных значений корней уравнения в MathCad?

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Решить уравнение y=x-cos(x)

$f(x) := x - \cos(x)$



корень уравнения x=0,74
находится на отрезке [0,1]

Первая производная $\frac{d}{dx}(x - \cos(x))$ $f1(x) := 1 + \sin(x)$

Вторая производная $\frac{d}{dx}(1 + \sin(x))$ $f2(x) := \cos(x)$

$a := 0$ $b := 1$ $x := \frac{b + a}{2}$ $x = 0.5$ $f(a) \cdot f2(x) = -0.878$

$f(b) \cdot f2(x) = 0.403$

Метод касательных

$x_0 := b$ $n := 0..3$ $x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f1(x_n)}$ $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.685 \\ 0.736 \\ 0.739 \\ 0.739 \end{pmatrix}$

корень x=0,739

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Номер варианта	Уравнения 1	Уравнения 2
1	$2\cdot x^2+5\cdot x-3$ $x^3-3\cdot x-8$	$\cos(x+0.5)-x^3$ $x-\sin(x)+5$
2	$2\cdot x^2-0.5\cdot x-3$ $x^3-3\cdot x^2+6\cdot x+3$	$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-0.5\cdot x$ $3\cdot x-\cos(x)-1$
3	$x^4-18\cdot x^2+6$ $x^3-2.2\cdot x^2+0.4\cdot x-1.5$	$2\cdot e^x+5\cdot x$ $x\cdot\log(x)-1.2$
4	$x^4-x^3-2\cdot x^2+3\cdot x-3$ $x^3-3\cdot x^2+9\cdot x+2$	$5\cdot\sin(x)-x$ $1.8\cdot x^2-\sin(10\cdot x)$
5	$x^2+2\cdot x-1$ $x^3+1.5\cdot x^2+0.5\cdot x-1.2$	$2\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-0.5\cdot x^2+1$ $x^2-20\cdot\sin(x)$
6	$3\cdot x^4-8\cdot x^3-18\cdot x^2+2$ $x^3+3\cdot x+1$	$x^2-30\cdot\sin(x)$ $2\cdot x-\log(x)-7$
7	$2\cdot x^3-9\cdot x^2-60\cdot x-1$ $x^3+4\cdot x^2+0.5\cdot x-2$	$2\cdot\log(x)-\frac{x}{2}+1$ $3\cdot x-\cos(x)-1$
8	$5\cdot x^2-3\cdot x-3$ $x^3-3\cdot x^2+9\cdot x-9$	$(x-4)^2\cdot\ln(x-3)+1$ $0.5^x-5-(x+2)^2$
9	x^2+x-5 $x^3-3\cdot x^2+9\cdot x-8$	$(x-1.5)^2\cdot\log(x+11)-1$ $5^x+3\cdot x$
10	$3\cdot x^2+2\cdot x-2$ $x^3-2\cdot x^2+3\cdot x-1.2$	$\sin(x+1)-0.5\cdot x$ $2^x+5\cdot x-3$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Теоретические сведения

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Алгебраические и трансцендентные уравнения

При решении практических задач часто приходится сталкиваться с решением уравнений. Всякое уравнение с одним неизвестным можно представить в виде

$$\varphi(x) = g(x), \qquad (1)$$

где $\varphi(x)$ и $g(x)$ — данные функции, определенные на некотором числовом множестве X, называемом областью допустимых значений уравнения,

Уравнение с одним неизвестным можно записать в виде

$$f(x)=0. \qquad (2)$$

Действительно, перенеся $g(x)$ в левую часть уравнения (1), имеем уравнение $\varphi(x)-g(x) = 0$, равносильное (1). Если обозначить левую часть последнего уравнения через $f(x)$, то получаем уравнение (2).

Совокупность значений переменной x, при которых уравнение (1) превращается в тождество, называется решением этого уравнения, а каждое значение x из этой совокупности называется корнем уравнения.

Например, уравнение $x^2 = 2 - x$ имеет корни $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$. Подставив - 2 и 1 в заданное уравнение вместо x получим тождества: $(-2)^2 = 2 - (-2)$, т. е. $4 \equiv 4$; $1^2 = 2-1$, т. е. $1 \equiv 1$.

Решить уравнение — значит найти множество всех корней этого уравнения. Оно может быть конечным или бесконечным. Так, рассмотренное выше уравнение имеет два корня. Уравнение $\sin x = 0$ имеет решение $x = \pi n (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Придавая n различные значения, получаем бесконечное множество корней.

Совокупность нескольких уравнений с несколькими неизвестными называют системой уравнений (неизвестное, обозначенное одной и той же буквой в каждом из уравнений, должно означать одну и ту же неизвестную величину.

Решением системы уравнений с несколькими неизвестными называется совокупность значений этих неизвестных, обращающая каждое уравнение системы в тождество.

Например, система

$$\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ x + y^2 = 3 \end{cases}$$

имеет решение x = 2, y = 1, так как при этих значениях неизвестных уравнения системы обращаются в тождества: $4 + 1 \equiv 5$, $2 + 1 \equiv 3$.

Решить систему уравнений — значит найти множество всех ее решений или показать, что она решений не имеет.

В зависимости от того, какие функции входят в уравнения (1) или (2), уравнения разделяются на два больших класса: алгебраические и трансцендентные.

Функция называется алгебраической, если для получения значения функции по данному значению x нужно выполнить арифметические операции и возведение в степень с рациональным показателем. (Операция извлечения корня может быть представлена как операция возведения в степень с показателем *1/n*.)

Алгебраическая функция называется рациональной относительно переменной *x*, если над *x* не производится никаких других действий, кроме сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень.

Например:

$$f_1(x) = x^3 + 15x^2 - 1200x + 4; \quad f_2(x) = \frac{2}{x-8} + \frac{45}{x+5};$$

$$f_3(x) = (x-4)(x+5); \quad f_4(x) = \frac{3}{x+7} + \frac{4x+3}{3x^2+5}.$$

Если в рациональную функцию переменная *x* не входит в качестве делителя или не входит в выражение, являющееся делителем, то такая функция называется целой рациональной.

Например, следующие функции:

1) $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ (n— натуральное число или нуль, $a_0, a_1, ..., a_n$ — любые действительные числа, причем $a_0 \neq 0$);

2) $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x+8}{3}$

являются целыми рациональными. Целая рациональная функция определена на всей числовой оси.

Если в рациональной функции хотя бы один раз встречается деление на переменную *x* или переменная *x* входит в выражение, являющееся делителем, то такая функция называется дробно-рациональной. Такова, например, функция

$$y = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n},$$

где m — натуральное число или нуль; n — натуральное число; $a_0, a_1, ..., b_0, b_1, ...$ — любые действительные числа ($a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$). Дробно-рациональная функция определена на всей числовой оси, за исключением тех точек, в которых знаменатель обращается в нуль.

Функция называется иррациональной, если для получения значения функции по данному значению *x* нужно выполнить, кроме четырех арифметических действий (всех или некоторых), еще и извлечение корня. При этом функция будет иррациональной лишь тогда, когда аргумент *x* стоит под знаком радикала.

Так, функция

$$y = \frac{3x^3 - 4x + \sqrt[3]{x-1}}{7x-4}$$

является иррациональной, а функция

$$y = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{4}}x^2 + \frac{\sqrt{5}}{2}x + 4$$

иррациональной не является, поскольку *x* не стоит под знаком радикала.

Выше указывалось, что все рациональные и иррациональные функции относятся к классу алгебраических функций.

Другой большой класс функций — трансцендентные функции. К ним относятся все неалгебраические функции: показательная a^x, логарифмическая $log_a x$, тригонометрические *sin x, cos x, tg x, ctg x*, обратные тригонометрические *arcsin x, arccos x, arctg x, arcctg x* и др.

Если в запись уравнения входят только алгебраические функции, то уравнение называется алгебраическим,

Например, уравнения

$$x^5 - 4 = 0,\ x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 1 = 0$$

являются алгебраическими.

Алгебраическое уравнение может быть приведено к виду

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0. \quad (3)$$

Поэтому, когда говорят «алгебраическое уравнение», то обычно имеют в виду уравнение вида (3).

Если уравнение (3) получено преобразованием уравнения, в которое входила дробная рациональная 'или иррациональная функция, то необходимо учитывать, что эти функции определены не на всей числовой оси.

Например, уравнение

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{6-x} = 3$$

после освобождения от иррациональности примет вид

$$4x^2 - 16x - 47 = 0.$$

Однако первоначальное уравнение определено не на всей числовой оси, а для x, принадлежащих отрезку [2, 6].

Числа $a_0, a_1, ..., a_n$ называются коэффициентами уравнения (3), они могут быть как действительными, так и комплексными. В дальнейшем изложении будут рассматриваться алгебраические уравнения вида (3) только с действительными коэффициентами.

Решение уравнения с одним неизвестным заключается в отыскании корней, т. е. тех значений x, которые обращают уравнение в тождество. Корни уравнения могут быть вещественными и невещественными (комплексными).

Найти точные значения корней уравнения можно только в исключительных случаях, обычно, когда есть какая-либо простая формула для вычисления значения корней, выражающая их через известные величины.

Так, для нахождения корней квадратного уравнения вида $x^2 + px + q = 0$ используется формула

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \quad (4)$$

Для решения кубического уравнения вида $x^3 + px + q = 0$ применяется формула

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Однако практическое применение этой формулы весьма затруднительно и требует использования комплексных чисел.

Для решения уравнения четвертой степени также существует формула, однако она является настолько сложной, что практически не применяется, и мы ее рассматривать не будем.

Норвежский математик Абель доказал, что при $n \geq 5$ не существует формулы, выражающей решение алгебраического уравнения (3) при помощи арифметических операций и извлечения корней. Лишь для некоторых частных случаев алгебраических уравнений, степень которых больше четырех, могут существовать формулы решения.

Кроме того, коэффициенты некоторых уравнений являются приближенными числами и, следовательно, вопрос о нахождении точных корней вообще не может быть поставлен.

Поэтому большое значение приобретают методы приближенного вычисления корней уравнения *f(x) = 0*.

При решении многих практических задач точное решение уравнения не всегда является необходимым. Задача нахождения корней считается решенной, если корни вычислены с заданной степенью точности.

Как же следует понимать утверждение «корень вычислен с заданной степенью точности»? Пусть ξ — корень уравнения, $\bar{x}$ —его приближенное значение с точностью до ε; это означает, что $|\xi-\bar{x}|\leq\varepsilon$. Если установлено, что искомый корень ξ заключен между числами a и b, т. е. a <ξ<b, причем b — a ≤e, то числа a и b — это приближенные значения корня ξ соответственно с недостатком и с избытком с точностью до ε, так как $|\xi-a|<b-a\leq\varepsilon\, и\, |\xi-b|<b-a\leq\varepsilon$. За приближенное значение корня ξ с точностью до ε можно принять любое число, содержащееся между a и b.

Например, если корень ξ заключен между 3,228 и 3,229 (т. е. 3,228 < ξ < 3,229), то за приближенное значение корня с точностью до 0,001 можно принять числа 3,228, 3,229 и любое число, заключенное между ними.

В настоящей главе мы будем рассматривать способы приближенного решения уравнений и систем уравнений. Некоторые из них одинаково применимы к отысканию корней как трансцендентных, так и алгебраических уравнений. Другие способы применимы только к алгебраическим уравнениям.

Графические методы решения уравнений

Графические методы решения уравнений. Одним из методов решения уравнений является графический. Точность такого решения невелика, однако с помощью графика можно разумно выбрать первое приближение, с которого начнется дальнейшее решение уравнения. Существуют два способа графического решения уравнений.

Первый способ. Все члены уравнения переносят в левую часть, т. е. представляют его в виде $f(x) = 0$. После этого строят график функции $y = f(x)$, где $f\ (x)$-левая часть уравнения. Абсцисы точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Оx и являются корнями уравнения, так как в этих точках у = 0 (рис. 3.1).

Второй способ. Все члены уравнения разбивают на две группы, одну из них записывают в левой части уравнения, а другую в правой, т. е. представляют его в виде $\varphi(x) = g\ (x)$. После этого строят графики двух функций $y = \varphi\ (x)$ и $y = g\ (x)$. Абсциссы точек пересечения графиков этих двух функций и служат корнями данного уравнения. Пусть точка пересечения графиков имеет абсциссу x_0, ординаты обоих графиков в этой точке равны между собой, т. е. $\varphi\ (x_0) = g\ (x_0)$. Из этого равенства следует, что x_0 — корень уравнения (рис. 3.2),

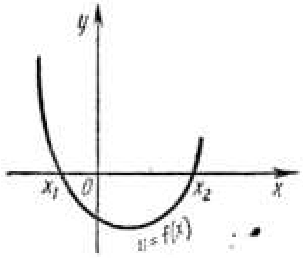


Рис. 3.1

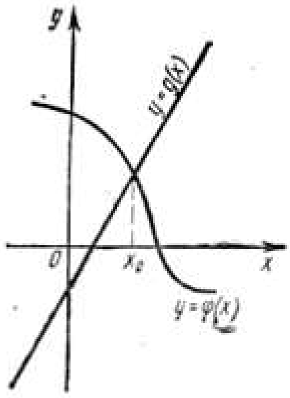


Рис. 3.2

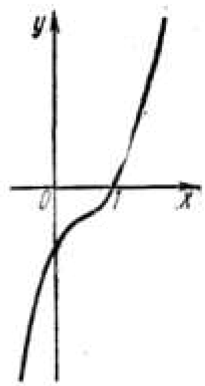


Рис. 3.3

Пример 1. Решить графически уравнение $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$.

Решение. Первый способ. Построим график функции $y = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ и определим абсциссы точек пересечения этого графика с осью Оx. Кривая пересекает ось Оx в точке $x = 1$, следовательно, уравнение имеет один корень (рис. 3.3). (Отметим, что алгебраическое уравнение третьей степени имеет или один действительный корень или три. Так как кривая пересекает ось абсцисс только в одной точке, то данное уравнение имеет только один действительный корень. Остальные два корня — комплексные.)

Второй способ. Представим данное уравнение в виде $x^3 = 2x^2 - 2x + 1$ и построим графики функций $y = x^3$ и $y = 2x^2 - 2x + 1$. Найдем абсциссу точки пересечения этих графиков; получим $x = 1$ (рис. 3.4).

Пример 2. Найти приближенно графическим способом корни уравнения
$\lg x - 3x + 5 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение следующим образом:
$\lg x = 3x - 5$.

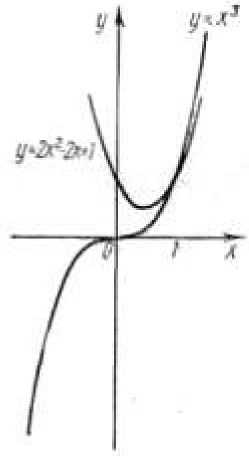
Функции в левой и в правой части уравнения имеют общую область определения: интервал $0 < x < +\infty$. Поэтому будем искать корни именно в этом интервале.

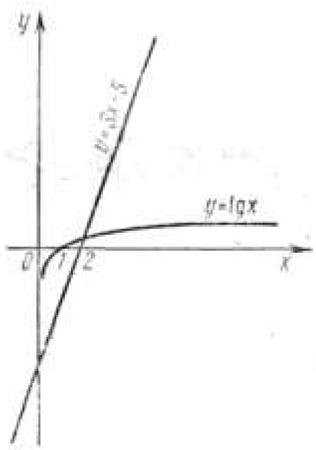
Строим графики функций $y = \lg x$ и $y = 3x - 5$ (рис. 3.5). Прямая $y = 3x - 5$ пересекает логарифмическую кривую в двух точках с абсциссами $x_1 \approx 0{,}00001$ и $x_2 \approx 1{,}75$. На рисунке трудно показать пересечение графиков этих двух функций в первой точке, однако, учитывая, что нижняя ветвь логарифмической кривой неограниченно приближается к оси Оy, можно предполагать, что пересечение этих двух графиков произойдет вблизи точки пересечения графика функции у = 3х — 5 и оси Оy. Абсцисса точки пересечения приближенно равна 0,00001. Итак, корни уравнения $x_1 \approx$ 0,00001 и $x_2 \approx$ 1,75.

Пример 3. Найти графически корни уравнения $2^x = 2x$.

Решение. Строим графики функций $y = 2^x$ и $y = 2x$. Эти графики пересекаются в двух точках, абсциссы которых равны $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Данное уравнение имеет два корня $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ (рис. 3.6).

Подводя итог вышеизложенному, можно рекомендовать для графического решения уравнения *f(x) = 0*, все корни которого лежат в промежутке [a, b], следующую простую схему.





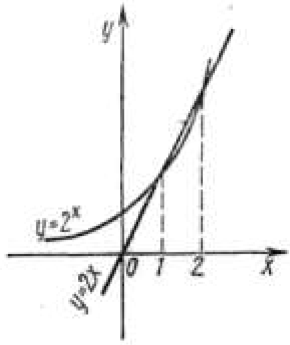


Рис. 3.4 Рис. 3.5 Рис. 3.6

1. Представить указанное уравнение в виде *φ(x)=g(x)* с таким расчетом, чтобы функции *y = φ(x)* и *y=g(x)* были просты и удобны для исследования и построения.
2. На миллиметровой бумаге вычертить графики функций *y = φ(x)* и *y = g (x)* в промежутке (a, b].
3. Если графики не пересекаются, то корней в данном промежутке нет. Если же графики пересекаются, то нужно определить точки их пересечения, найти абсциссы этих точек, которые и будут приближенными значениями корней рассматриваемого уравнения.

Отделение корней

В предыдущем параграфе был рассмотрен вопрос о графическом решении уравнений и систем уравнений. Однако даже при очень тщательном построении чертежа значения корней можно получить с небольшой степенью точности. Поэтому чтобы эти значения получить с любой заданной степенью точности, необходимо применять методы, Которые позволяют «уточнять» найденные значения.

Процесс нахождения приближенных значений корней уравнения разбивается на два этапа: 1) отделение корней; 2) уточнение корней до заданной степени точности.

В настоящем параграфе рассматривается первый этап — отделение корней.

Корень ξ уравнения $f(x) = 0$ считается отделенным на отрезке [a, b], если на этом отрезке уравнение $f(x) = 0$ не имеет других корней.

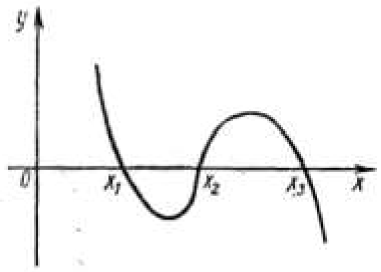


Рис 3.9

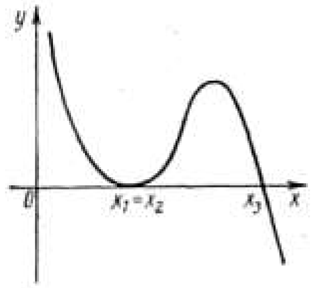


Рис. 3.10

Отделить корни — это значит разбить всю область допустимых значений на отрезки, в каждом из которых содержится один корень. Отделение корней можно произвести двумя способами — графическим и аналитическим.

Графический метод отделения корней. При графическом методе отделения корней поступают так же, как и при графическом методе решения уравнений. Строят график функции y = f(x) для уравнения вида f (x) = 0 или представляют уравнение в виде $\varphi(x) = g(x)$ и строят графики функций $y = \varphi(x)$ и y = g (x). Значения действительных корней уравнения являются абсциссами точек пересечения графика функции y = f (x) с осью O*x* или абсциссами точек пересечения графиков функций $y = \varphi(x)$ и y = g(x). Отрезки, в которых заключено только по одному корню, легко находятся.

Замечание. Пусть график функции y = f (x) имеет вид, изображенный на рис. 3.9. Кривая трижды пересекает ось абсцисс; следовательно, уравнение имеет три простых корня.

Если же кривая касается оси абсцисс (рис. 3.10), то уравнение имеет двукратный корень. Например, уравнение $x^3 — 3x + 2 = 0$ имеет три корня: $x_1 = - 2$; $x_2 = x_3 = 1$ (рис. 3.11).

Если же уравнение имеет трехкратный действительный корень, то в месте касания с осью кривая y = f (x) имеет точку перегиба (рис. 3.12). Например, уравнение $x^3 — 3x^2 + 3x — 1 =0$ имеет трехкратный корень, равный единице (рис. 3.13).

Графический метод отделения корней не обладает большой точностью. Он дает возможность грубо определить интервалы изоляции корня. Далее корни уточняются одним из способов, указанных ниже.

Аналитический метод отделения корней. Аналитически корни уравнения f(x) = 0 можно отделить, используя некоторые свойства функций, изучаемые в курсе математического анализа.

Сформулируем без доказательства теоремы, знание которых необходимо при отделении корней.

Теорема 1. Если функция f (x) непрерывна на отрезке [a, b] и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то внутри отрезка [a, b] существует по крайней мере один корень уравнения f(x) = 0.
Теорема 2. Если функция f(x) непрерывна и монотонна на отрезке [a, b] и принимает на концах отрезка значения разных знаков, то

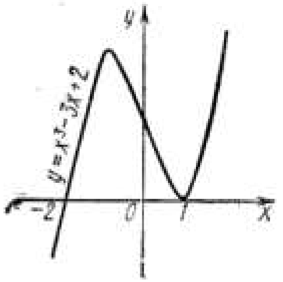


Рис. 3.11

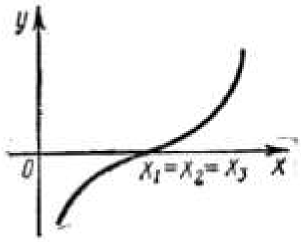


Рис. 3.12

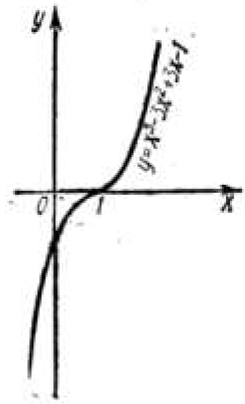


Рис. 3.13

внутри отрезка [a, b] содержится корень уравнения f (x) = 0, и этот корень единственный.
Теорема 3. Если функция f (x) непрерывна на отрезке [a, b] и принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная *f'(x)* сохраняет постоянный знак внутри отрезка, то внутри отрезка существует корень уравнения f (x) = 0 и притом единственный.
Приведем теперь некоторые сведения из математического анализа, которые понадобятся в дальнейшем.
Если функция f(x) задана аналитически, то областью существования (областью определения) функции называется совокупность всех тех действительных значений аргумента, при которых аналитическое выражение, определяющее функцию, не теряет числового смысла и принимает только действительные значения.
Функция y = f(x) называется возрастающей, если с возрастанием аргумента значение функции увеличивается (рис. 3.14, а и б), и убывающей, если с возрастанием аргумента значение функции уменьшается (рис. 3.14, б и г).
Функция называется монотонной, если она в заданном промежутке либо только возрастает, либо только убывает.
Пусть на отрезке [a, b] функция f(x) непрерывна и принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная *f'(x)* сохраняет постоянный знак на интервале (a, b). Тогда если во всех точках интервала (a, b) первая производная положительна, т. е. f'(x) > 0, то функция f (x) в этом интервале возрастает (рис, 3.14, а и в).

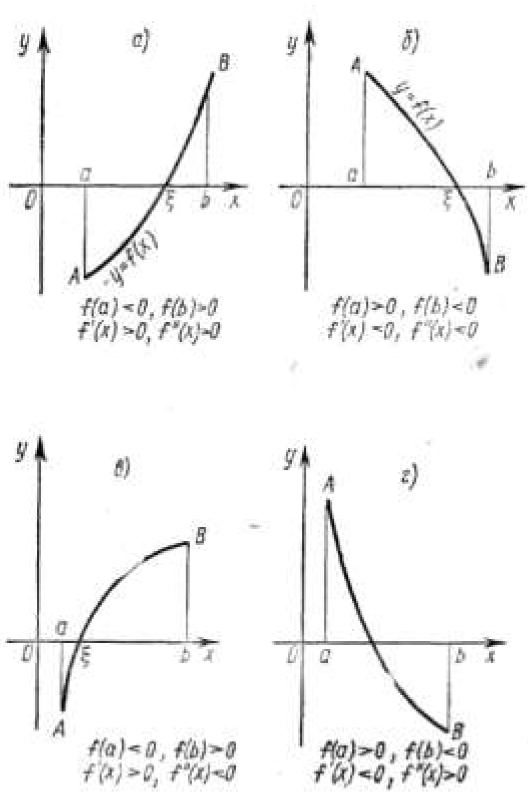


Рис. 3.14

Если же во всех точках интервала (а, b) первая производная отрицательна, т. е. $f'(x)<0$, то функция в этом интервале убывает (рис. 3.14, б и г). Корнем функции служит абсцисса точки пересечения графика функции f(x) с осью Оx.

Пусть на отрезке [a, b] функция f(x) имеет производную второго порядка, которая сохраняет постоянный знак на всем отрезке. Тогда если $f''(x) > 0$, то график функции является выпуклым вниз (рис. 3.14, а и г); если же $f''(x) < 0$, то график функции является выпуклым вверх (рис. 3.14, б и е).

Точки, в которых первая производная функции равна нулю, а также те, в которых она не существует (например, обращается в бесконечность), но функция сохраняет непрерывность, называются критическими (этот признак является необходимым признаком экстремума).

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке всегда имеются точки, в которых она принимает наибольшее и наименьшее значения. Этих значений функция достигает или, в критических точках, или на концах отрезка. Следовательно, чтобы определить наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке, надо: 1) определить - критические точки функции; 2) вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка [a, b] 3) наибольшее из значений, найденных в п. 2), будет наибольшим, а наименьшее — наименьшим значением функции на отрезке.

В связи с вышеизложенным можно рекомендовать следующий порядок действий для отделения корней аналитическим методом.

1. Найти f'(x) — первую производную.

2. Составить таблицу знаков функции f(x), полагая x равным: а) критическим значениям (корням) производной или ближайшим к

ним; б) граничным значениям (исходя из области допустимых значений неизвестного).

3. Определить интервалы, на концах которых функция принимает значения противоположных знаков. Внутри этих интервалов содержится по одному и только по одному корню.

Пример. Отделить корни уравнения 2^x — 5x — 3 = 0 аналитическим методом.

Решение. Обозначим f(x) = 2^x — 5* — 3. Область определения функции f(x) — вся числовая ось. Найдем первую производную

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 5.$$

Приравниваем эту производную нулю и вычисляем корень:

$$2^x \ln 2 - 5 = 0; \quad 2^x \ln 2 = 5; \quad 2^x = \frac{5}{\ln 2}; \quad x \lg 2 = \lg 5 - \lg \ln 2;$$

$$x = \frac{\lg 5 - \lg \ln 2}{\lg 2} = \frac{0,6990 + 0,1592}{0,3010} = \frac{0,8582}{0,3010} = 2,85$$

Составляем таблицу знаков функции f(x), полагая x равным: а) критическим значениям (корням производной) или ближайшим к ним; б) граничным значениям (исходя из области допустимых значений неизвестного):

x	- ∝	*2*	*3*	+ ∝
sign $f_1(x)$	+	—	—	+

Уравнение имеет два корня, так как происходят две перемены знака функции. Составим новую таблицу, с более мелкими интервалами изоляции корня:

x	—1	0	1	2	3	4	5
sign $f_1(x)$	+	—	—	—	—	—	+

Корни уравнения заключены в промежутках (—1, 0) и (4, 5).

Уточнение корней. Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть корень уравнения f(x) = 0 отделен на отрезке [a, b], причем *f'(x)* и *f''(x)* непрерывны и сохраняют постоянные знаки на всем отрезке [a, b].

Геометрический смысл метода Ньютона состоит в том, что дуга кривой y = f (x) заменяется касательной к этой кривой (отсюда и второе название: метод касательных).

Первый случай. Пусть f(a) < 0, f(b) > 0, f ′(x) > 0, f''(x) > 0 (рис. 3.20, а) или f (a) > 0, f (b) < 0, *f′* (x) < 0, f'' (x) < 0 (рис. 3.20, б). Проведем касательную к кривой y = f (x) в точке B_0 {b; f (b)) и найдем абсциссу точки пересечения касательной с осью Ox. Известно, что уравнение касательной в точке B_0 (b; f(b)) имеет вид

$$y - f(b) = f'(b)(x - b).$$

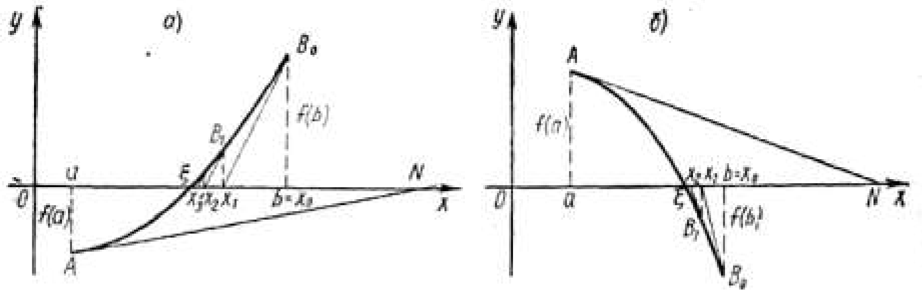


Рис. 3.20

Полагая y = 0, x = x_1 получим

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \qquad (1)$$

Теперь корень уравнения находится на отрезке [a, x_1]. Применяя снова метод Ньютона, проведем касательную к кривой в точке B_1 (x_1, f (x_1)) и получим

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

и вообще

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (2)$$

Получаем последовательность приближенных значений $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, каждый последующий член которой ближе к корню ξ, чем предыдущий. Однако все x_n остаются больше истинного корня ξ, т.е. x_n —приближенное значение корня ξ с избытком.

Второй случай. Пусть f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) < 0 (рис, 3.21, а) или f(a) > 0, f(b) < 0, f' (x) < 0, f″ (x) > 0 (рис. 3.21, б). Если снова провести касательную к кривой y = f (x) в точке B, то она пересечет ось абсцисс в точке, не принадлежащей отрезку [a, b]. Поэтому проведем касательную в точке A_0 (a; f(a)) и запишем ее уравнение для данного случая:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Полагая y = 0, x = x_1 находим

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \qquad (3)$$

Корень ξ находится теперь на отрезке [x_1, b]. Применяя снова метод Ньютона, проведем касательную в точке A_1 (x_1; f (x_1)) и получим

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

и вообще

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (4)$$

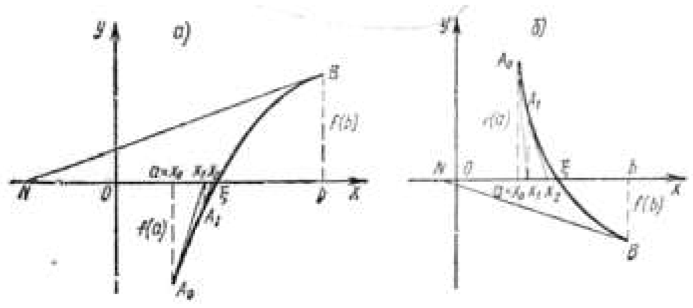


Рис. 3.21

Получаем последовательность приближенных значений $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, каждый последующий член которой ближе к истинному корню ξ, чем предыдущий, т. е. x_n — приближенное значение корня ξ с недостатком.

Сравнивая эти формулы с ранее выведенными, замечаем, что они отличаются друг от друга только выбором начального приближения: в первом случае за x_0 принимался конец b отрезка, во втором — конец a.

При выборе начального приближения корня необходимо руководствоваться следующим правилом: за исходную точку следует выбирать тот конец отрезка [a, b], в котором знак функции совпадает со знаком второй производной. В первом случае $f(b)\cdot f''(x) > 0$ и начальная точка b — x_0, во втором $f(a)\cdot f''(x) > 0$ и в качестве начального приближения берем a = x_0.

Для оценки погрешности можно пользоваться общей формулой

$$|\xi - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{m}, \qquad (5)$$

где

$$m = \min_{[a,\ b]} |f'(x)|$$

(эта формула годится и для метода хорд).

В том случае, когда отрезок [a, b] настолько мал, что на нем выполняется $M_2 < 2m_1$, где $M_2 = \max_{[a,\ b]} |f''(x)|,\ a\ \ m_1 = \min_{[a,\ b]} |f'(x)|$,

точность приближения на n-м шаге оценивается следующим образом:

если $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon,\ то\ |\varepsilon - x_x| < \varepsilon^2$.

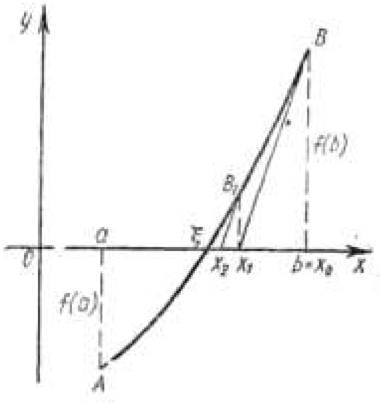


Рис. 3.22

Если производная f' (x) мало изменяется на отрезке [a, b], то для упрощения вычислений можно пользоваться формулой

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \qquad (6)$$

т. е. значение производной в начальной точке достаточно вычислить только один раз. Геометрически это означает, что касательные в точках B_n (x_n; $f(x_n)$) заменяются прямыми, параллельными касательной, проведенной к кривой y= f (x) в точке B_0 (x_0; f (x_0)) (рис, 3.22).

Пример 1. Методом касательных уточнить до ε = 0,001 корень уравнения $x^3+3x^2-3=0$, расположенный на отрезке [- 2,75; — 2,5].

Решение. Ранее было установлено, что *f(— 2,75) • f'' (x) > 0* (см. пример 1 §3.5). Поэтому, чтобы воспользоваться методом касательных, следует выбрать x_0 = -2,75. Вычисления будем вести по формуле (6). Находим

$f'(x) = 3x^2 + 6x$; $f'(x_0) = f'(-2,75) = 6,1875$.

Для удобства все вычисления сведем в следующую таблицу:

Таблица 3.6

n	x_n	x_n^3	x_n^2	$3x_n^2$	$f(x_n)$	$-\frac{f(x_n)}{6,1875}$
0	—2,75	—20,797	7,5625	22,6875	— 1,111	0,179
1	—2,571	— 16,994	6,6100	19,8300	—0,164	0,026
2	—2,545	— 16,484	6,4770	19,431	—0,053	0,008
3	—2,537	— 16,329	6,4364	19,309	0,020	0,003
4	—2,534	— 16,271	6,4212	19,2636	0,007	0,001
5	—2,533					

Из табл. 3.6 видно, что | x_5-x_4 | < 0,001, поэтому ξ = — 2,533.

Пример 2. Методом касательных уточнить до ε = 0,0001 корень ураядения x — sin x = 0,25, расположенный на отрезке [0,982; 1,178].

Решение. Здесь a = 0,982; b=1,178. Находим f'(x) = 1 — cos x; f''(x) = sin x > 0 на [0,982; 1,178]; f(1,178) • f'' (x) > 0. Значит, x_0 = 1,178. Вычисления будем вести по формулам (1) и (2) и сведем их в табл. 3.7. Из табл. 3.7 видно, что |x_3-x_2| < 0,0001, Таким образом, $\xi \approx 1,1712$.

Таблица 3.7

n	x_n	$-\sin x_n$	$f(x_n) = x_n - \sin x_n - 0,25$	$f'(x_n) = 1 - \cos x_n$	$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1,178	—0,92384	0,00416	0,61723	—0,0065
1	1,1715	—0,92133	0,00017	0,61123	—0,0002
2	1,1713	—0,92127	0,00003	0,61110	—0,00005
3	1,17125				

4 Интерполяционный многочлен лагранжа для равно- и неравноотстоящих узлов

1 Цель работы

1.1 Научиться вычислять приближение функции с помощью интерполяционных функций.

1.2 Уметь использовать пакет MathCad для решения задач интерполирования и экстраполирования.

2 Приборы и оборудования

2.1 ПК IBM PC.

2.2 Математический пакет MathCad.

3 Порядок выполнения работы

1.1 Найти приближенное значение функции при данном значении аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа, если функция задана в неравноотстоящих узлах интерполяции. Варианты заданий см. приложение Б, В.

1.2 Найти приближенное значение функции при данном значении аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа, если функция задана в равноотстоящих узлах интерполяции. Варианты заданий см. приложение Г.

1.3 Вычисления вести с тремя знаками после запятой.

4 Содержание отчета

4.1 Цель работы.

4.2 Выполнение задания.

4.3 Вывод о проделанной работе.

5 Контрольные вопросы

5.1 Дайте определение функциональной зависимости величины y от независимых переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

5.2 Назовите способы задания функциональных зависимостей. Охарактеризуйте их.

5.3 Какая задача называется задачей интерполяции, а какая экстраполяции?

5.4 Что такое узлы интерполяции, какими они бывают?

5.5 Напишите формулу для вычисления шага интерполяции.

5.6 Какие интерполяционные формулы применяются для решения задач интерполяции? Охарактеризуйте их.

5.7 Как находятся конечные разности различных порядков через значения функции в узловых точках?

5.8 Когда целесообразно применять первую интерполяционную формулу Ньютона, а когда вторую?

5.9 Как находятся разделенные разности различных порядков через значения функции в узловых точках?

5.10 В каких интерполяционных формулах применяются разделенные разности?

ПРИЛОЖЕНИЕ А
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ

1.1 Найти приближенное значение функции при данном значении аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа, если функция задана в неравноотстоящих узлах интерполяции.

$$x := \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.10 \\ 0.17 \\ 0.25 \\ 0.30 \\ 0.36 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 0.050042 \\ 0.100335 \\ 0.171657 \\ 0.255342 \\ 0.309336 \\ 0.376403 \end{pmatrix}$$

$n := 5 \qquad X1 := 0.26$

$$L(X1) := \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{j=0}^{n} \mathrm{if}\left(i = j, 1, \frac{X1 - x_j}{x_i - x_j}\right)$$

$L(X1) = 0.269236$

1.2 Найти приближенное значение функции при данном значении аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа, если функция задана в равноотстоящих узлах интерполяции.

$$x := \begin{pmatrix} 0.101 \\ 0.106 \\ 0.111 \\ 0.116 \\ 0.121 \\ 0.126 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 1.26183 \\ 1.27644 \\ 1.29122 \\ 1.30617 \\ 1.32130 \\ 1.32660 \end{pmatrix}$$

$X1 := 0.115 \quad n := 5 \quad h := x_1 - x_0 \quad h = 0.005 \quad q := \dfrac{X1 - x_0}{h} \quad q = 2.94$

$$L(X1) := \frac{\prod_{i=0}^{n} (q - i)}{n!} \cdot \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \cdot \frac{\frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} \cdot y_i}{q - i}$$

$L(X1) = 1.30524$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица №1

x	**y**
0,43	1,63597
0,48	1,73234
0,55	1,87686
0,62	2,03345
0,70	2,22846
0,75	2,35973

№ варианта	**x**
1	0,702
4	0,512
7	0,645
10	0,736
13	0,608

Таблица №2

x	**y**
0,02	1,02316
0,08	1,09590
0,12	1,14725
0,17	1,21483
0,23	1,30120
0,30	1,40976

№ варианта	**x**
2	0,102
5	0,114
8	0,125
11	0,203
14	0,154

Таблица №3

x	**y**
0,35	2,73951
0,41	2,30080
0,47	1,96864
0,51	1,78776
0,56	1,59502
0,64	1,34310

№ варианта	**x**
3	0,526
6	0,453
9	0,482
12	0,552
15	0,436

ПРИЛОЖЕНИЕ В
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица № 4

x	y
0,298	3,25578
0,303	3,17639
0,310	3,12180
0,317	3,04819
0,323	2,98755
0,330	2,91950
0,339	2,83598

№ варианта	X1	X2
1	0,308	0,335
4	0,314	0,337
7	0,325	0,303
10	0,312	0,304
13	0,321	0,336

Таблица №5

x	y
0,593	0,532050
0,598	0,535625
0,605	0,540598
0,613	0,546235
0,619	0,550431
0,627	0,555983
0,632	0,559428

№ варианта	X1	X2
2	0,608	0,630
5	0,615	0,594
8	0,622	0,596
11	0,603	0,631
14	0,610	0,628

Таблица №6

x	y
0,698	2,22336
0,706	2,24382
0,714	2,26446
0,727	2,29841
0,736	2,32221
0,747	2,35164
0,760	2,38690

№ варианта	X1	X2
3	0,720	0,755
6	0,740	0,705
9	0,750	0,777
12	0,765	0,700
15	0,755	0,704

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица №7

x	y
1,415	0,888551
1,420	0,889599
1,425	0,890637
1,430	0,891667
1,435	0,892687
1,440	0,893698
1,445	0,894700
1,450	0,895693
1,455	0,896677
1,460	0,897653
1,465	0,898619

№ варианта	X1	X2	X3	X4
1	1,4161	1,4625	1,4135	1,470
6	1,4179	1,4633	1,4124	1,4655
11	1,4263	1,4575	1,410	1,4662

Таблица №8

x	y
0,101	1,26183
0,106	1,27644
0,111	1,29122
0,116	1,30617
0,121	1,32130
0,126	1,33660
0,131	1,35207
0,136	1,36773
0,141	1,38357
0,146	1,39959
0,101	1,26183

№ варианта	X1	X2	X3	X4
2	0,1026	0,1440	0,099	0,161
7	0,1035	0,1492	0,096	0,153
12	0,1074	0,1485	0,1006	0,156

Таблица №9

x	y
0,15	0,860708
0,20	0,818731
0,25	0,778801
0,30	0,740818
0,35	0,704688
0,40	0,670320
0,45	0,637628
0,50	0,606531
0,55	0,576950
0,60	0,548812
0,65	0,522046

№ варианта	X1	X2	X3	X4
3	0,1511	0,7250	0,1430	0,80
8	0,1535	0,7333	0,100	0,7540
13	0,1525	0,6730	0,1455	0,85

Таблица №10

x	y
0,180	5,61543
0,185	5,46693
0,190	5,32634
0,195	5,19304
0,200	5,06649
0,205	4,94619
0,210	4,83170
0,215	4,72261
0,220	4,61855
0,225	4,51919
0,230	4,42422

№ варианта	X1	X2	X3	X4
4	0,1817	0,2275	0,175	0,2875
9	0,1827	0,2292	0,1776	0,240
14	0,1873	0,2326	0,1783	0,245

Таблица №11

x	y
3,50	33,1154
3,55	34,8133
3,60	36,5982
3,65	38,4747
3,70	40,4473
3,75	42,5211
3,80	44,7012
3,85	46,9931
3,90	49,4024
3,95	51,9354
4,00	54,5982

№ варианта	X1	X2	X3	X4
5	3,522	4,176	3,475	4,25
10	3,543	4,184	3,488	4,30
15	3,575	4,142	3,45	4,204

ПРИЛОЖЕНИЕ Д
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ
ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И ЭКСТРАПОЛИРОВАНИЕ
Способы задания функций

В практической деятельности постоянно приходится сталкиваться с необходимостью выявления форм связи в процессах и явлениях и необходимостью их математического описания.

Остановимся на таких формах связи, для которых некоторая величина y, характеризующая процесс, зависит от совокупности несвязанных между собой величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таким образом, что каждому набору $(x_1; x_2; \ldots, x_n)$ соответствует единственное значение величины y.

Такое однозначное соответствие величины y совокупности независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *функциональной зависимостью*, а сама переменная величина y — *функцией* переменных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что формально записывается в виде

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Так, выражение $y = x_1^2 + 3\sqrt{x_2} + x_1 x_3^2$ является функцией трех переменных.

Если величина y есть функция одной независимой переменной x, то эту связь можно представить соотношением следующего вида:

$$y=f(x)$$

Например, площадь круга S является функцией независимой переменной — радиуса круга R, т. е. S = f(R); конкретный вид этой функции $S = \pi R^2$. Объем фигуры является уже функцией трех измерений: $V=f(x_1, x_2, x_3)$. и в зависимости от вида фигуры эта функциональная связь соответственно конкретизируется.

Из курса математического анализа известны три способа задания функциональных зависимостей: 1) аналитический; 2) графический; 3) табличный.

Наиболее удобным способом задания функциональной зависимости y=f(x) является *аналитический*, так как он прямо указывает действия и их последовательность выполнения над независимой переменной x для получения соответствующего значения величины y.

Так, например, в результате, математической обработки можно получить следующую аналитическую зависимость денежных кредитов в сельском хозяйстве под товарно-материальные ценности и сезонные затраты от затрат на крупный рогатый скот:

$$y = 51{,}0203 + 0{,}1059\,x,$$

где y — кредиты под товарно-материальные ценности; x — затраты на крупный рогатый скот.

Другой пример аналитической зависимости: связь пути со временем в равноускоренном движении выражается как

$$s = \upsilon t + \frac{at^2}{2}.$$

Положительным качеством аналитического способа задания является возможность получать значения y для любого фиксированного аргумента x с любой точностью.

К недостаткам этого способа следует отнести то, что приходится производить всю последовательность вычислений; кроме того, аналитический метод не обладает наглядностью.

Указанные недостатки аналитического способа устраняются в случае *графического задания* функции $y = f(x)$.

Графиком данной функции $y = f(x)$ называется геометрическое место точек плоскости xOy, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = f(x)$.

Табличный способ задания функций распространен в технике, физике, экономике, естествознании (и чаще всего возникает в результате эксперимента).

Пусть, например, в результате опыта получена зависимость омического сопротивления R медного стержня от температуры t° в виде следующей таблицы:

R	77,80	79,75	80,80	82,35	83,90	85,10
t°	25,0	30,1	36,0	40,0	45,1	50,0

В этом эксперименте значение омического сопротивления медного стержня меняется при колебаниях температуры и является зависимой переменной.

Преимуществом табличного способа задания функции является то, что для каждого значения независимой переменной, помещенной в таблицу, можно сразу же, без всяких измерений и вычислений, найти соответствующее значение функции.

Недостаток табличного способа состоит в том, что нельзя задать всю функцию сплошь, т. е. всегда найдутся такие значения независимой переменной, которых нет в таблице.

Математические таблицы.

Среди функций, постоянно встречающихся в математике, много таких, вычисление которых, несмотря на их простоту, довольно громоздко. В этих случаях вычислительную работу облегчают математические таблицы.

Наиболее распространены таблицы функций одной переменной. К ним относятся таблицы обратных чисел, квадратов и кубов чисел, квадратных и кубических корней, таблицы логарифмов, таблицы тригонометрических функций, таблицы показательной и других элементарных функций. Составляют таблицы функций двух и большего числа переменных. Примером таблицы функции двух переменных может служить таблица произведений двух чисел.

Таблица представляет собой набор значений функции для последовательности значений аргументов $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Она должна содержать такой набор значений аргумента, чтобы для любых значений аргумента, отличных от $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, можно было получить значение функции с необходимой степенью точности.

Основными характеристиками таблиц являются: 1) название функций, значение которых они выражают; 2) объем; 3) шаг; 4) количество знаков табулируемой функции; 5) количество входов.

Названием функции, численные значения которой собраны в таблице, является аналитическое выражение этой функции, например $\sin x, \lg x, e^x$ и т. д.

Объем таблицы выражается начальным и конечным значением аргумента. Так, например, объем таблицы y = sin x охватывает значения аргумента от 0°0' до 89°54'.

Почти для всех табулируемых функций значения аргумента в таблице образуют арифметическую прогрессию, разность которой h называется *шагом таблицы*. Таким образом,

$$h = x_{i-1} - x_i = const(i = 1, 2, \ldots, n),$$

или

$$x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \ldots .$$

В качестве иллюстрации рассмотрим фрагмент таблицы перевода радианов в градусы и градусов в радианы (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Радианы	Градусы	Радианы	Градусы	Градусы	Радианы	Градусы	Радианы	Минуты	Радианы	Минуты	Радианы
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
0,20	11,459	0,70	40,107	20	0,34907	70	1,22173	20	0,00582	50	0,01454
0,21	12,032	0,71	40,680	21	0,36652	71	1,23918	21	0,00611	51	0,01484
0,22	12,605	0,72	41,253	22	0,38397	72	1,25662	22	0,00640	52	0,01513
0,23	13,178	0,73	41,826	23	0,40143	73	1,27409	23	0,00669	53	0,01542
0,24	13,751	0,74	42,399	24	0,41888	74	1,29151	24	0,00698	54	0,01571

В первых двух колонках приведенной таблицы в качестве независимой переменной выступает радианная мера, а градусы рассматриваются как ее функция. То же справедливо и для третьей и четвертой колонок. В качестве шага таблицы здесь выбирается h = 0,01 радиана.

Начиная с пятой колонки, рассматривается функция, обратная данной, где в качестве независимой переменной выбираются градусы (или минуты), а соответственно радианная мера является функцией градусов (или минут). Шаг этой части таблицы равен одному градусу (в пятой и седьмой колонках) и одной минуте (в девятой и одиннадцатой колонках).

В справочных таблицах используется также и сложный двухуровневый шаг. По вертикали откладываются значения аргумента, отличающиеся на так называемый «грубый» шаг $x_i = x_{i-1} + h^* \ (i = 1, 2, \ldots, n)$, и соответствующие им значения функции $y_i = f(x_i) = f(x_{i-1} + h^*)$, а по горизонтальной линии располагаются значения функции в точках. отстоящих друг от друга на шаг, равный в большинстве случаев десятой доли «грубого» шага: $h = 0{,}1h^*$. Так, в табл. 4.2 приведен фрагмент таблицы кубических корней. Из приведенного фрагмента таблицы нетрудно определить «грубый» шаг по вертикали, равный $h^* = 1$, и более точный шаг по горизонтали, равный $h = 0{,}1$.

Обычно шаг таблицы выражается одной единицей какого-либо разряда (реже двумя или пятью единицами определенного разряда). Так, в таблицах квадратов, кубов, квадратных, кубических корней, в таблицах логарифмов «грубый» шаг $h^*=1$, в таблицах натуральных логарифмов, таблицах обратных чисел «грубый» шаг h^* равен 0,1 (см. табл. 4.2).

Если мы обратимся к таблице синусов (см. табл. 4.3), то в ней в качестве «грубого» шага выбирается один градус, более точный шаг равен шести минутам.

Таблица 4.2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
60	8,43433	43901	44369	44836	45303	45769	46235	46700	47165	47629
61	8,48093	48556	49018	49481	49942	50403	50954	51324	51784	52243
62	8,52702	53160	53618	54075	54532	54988	55444	55899	56354	56808
63	8,57262	57715	58168	58620	59072	59524	59975	60425	60875	61325
64	8,61774	62222	62671	63118	63566	64012	64459	64904	65350	65795

Таблица 4.3

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′			1′	2′	3′	4′	5′
65°	0,9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	0,9135	24°	1	2	4	5	6
66°	0,9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	0,9205	23°	1	2	3	5	6
67°	0,9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	0,9272	22°	1	2	3	4	6
68°	0,9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	0,9336	21°	1	2	3	4	5
69°	0,9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	0,9397	20°	1	2	3	4	5

Следующей характеристикой таблиц является *количество знаков* табулируемой функции, так как значения функции $y = f(x)$ для табулированных значений аргумента в математических таблицах и результаты измерений в технических таблицах являются приближенными величинами.

При ручной отладке программ для ЭВМ расчеты ведут с помощью таблиц, обладающих повышенной точностью. К ним относятся «Таблицы семизначных логарифмов» Вега, «Таблицы Барлоу», содержащие квадраты, кубы, квадратные и кубические корни, а также обратные величины.

Для практических ручных расчетов наиболее употребительными являются «Пятизначные математические таблицы» Б. И. Сегала и К. А. Семендяева, «Справочник по математике» И. Н. Бронштейна и К. А. Семендяева и т. д.

В таблицы вносятся только верные знаки числового значения функции; это означает, что погрешность не превышает пяти единиц первого отброшенного разряда. При этом значения функции для всех значений x, приводимых в таблице, определяются с одинаковой абсолютной погрешностью. Точность, с которой приведены в таблице значения функции, называется точностью таблицы. Иногда на разных участках таблицы точность бывает разной.

В некоторых случаях при работе с таблицами необходимо знать разности соседних приведенных в таблице значений функций. Эти разности называются *табличными разностями* и обозначаются через Δy:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \ldots, \Delta y_k = y_{k-1} - y_k .$$

Для разностей в таблицах иногда отводят отдельный столбец, а чаще они выписываются в столбце значений функций в промежутке между соответствующими ее значениями. Разности записываются в единицах последнего разряда без нулей впереди значащих цифр и без запятой. Например, в таблице

x	sin x
1,000	0,84147
1,001	0,84201

табличная разность Δy=0,84201-0,84147 = 0,00054 напечатана между соответствующими значениям sin x значащими цифрами как 54.

Следующей важной характеристикой таблиц является *количество входов* в нее. Оно равнозначно числу аргументов функции. Так, таблицы для функциональных зависимостей y=f(x) являются таблицами с одним входом. К ним относятся приведенные выше таблицы 4.1, 4.2 и 4.3.

Табулирование функции двух переменных z= f (x, y) приводит к таблице с двумя входами. Среди подобных таблиц широкое практическое применение находят таблицы умножения.

Таблица 4.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9
541	1082	1623	2164	2705	3246	3787	4328	4869
542	1084	1626	2168	2710	3252	3794	4336	4878
543	1086	1629	2172	2715	3258	3801	4344	4887
544	1088	1632	2176	2720	3260	3808	4352	4896
545	1090	1635	2180	2725	3270	3815	4360	4905

В табл. 4.4 трехразрядное множимое записывается в левый столбец, одноразрядный множитель — в верхнюю строку таблицы. Шаг обоих входов в таблицу равен единице. Для получения произведения трехзначного числа на однозначное достаточно найти строку, в первом столбце которой записано множимое, и выбрать тот столбец, в котором расположен множитель. На пересечении найденных строки и столбца и находится искомое произведение.

Пример 1. Пусть требуется умножить 543 на 8. В табл. 4.4 находим строку, содержащую 543, и столбец под номером 8. На их пересечении читаем число 4344, что и является искомым произведением.

Для умножения многозначных чисел множимое разбивают на части, содержащие не более трех цифр, и к каждой из этих частей применяют указанный способ.

Пример 2. Пусть требуется умножить 541 544 на 37. Разбиваем число 541 544 на две трехразрядные части 541 и 544. Последовательно умножаем каждую часть на 3 десятка и на 7 единиц, полученные частичные произведения складываем:

$$\begin{array}{r} 541\times 30 = 16230 \\ \underline{541\times 7\ =\ \ 3787} \\ 20017 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 544\times 30 = 16320 \\ \underline{544\times\ 7\ =\ \ 3808} \\ 20128 \end{array}$$

Первое частичное произведение сносим на три разряда влево относительно второго и складываем:

$$\begin{array}{r} 20017 \\ \underline{+\quad 20128} \\ 20037128 \end{array}$$

Это и есть искомый результат.

При работе с таблицами следует помнить, что в их расположении бывают особенности. Поэтому, обращаясь к новому справочнику, необходимо ознакомиться с его описанием.

Математическая постановка задачи интерполирования

В экономике и технике постоянно приходится сталкиваться с необходимостью вычисления значений функции y = f(x) в точках x, отличных от значений аргумента, фиксированных в таблице. Кроме того, в некоторых случаях, несмотря на то, что аналитическое выражение функции y = f(x) известно, оно является слишком сложным и неудобным для дальнейших математических преобразований. Подобные задачи практики формализуются как математические *задачи интерполирования*.

Пусть на отрезке [a, b] задана функция y = f(x) своими n + 1 значениями

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \ldots,\ y_n = f(x_n).$$

в точках x_0, x_1, …, x_n, которые назовем *узлами интерполяции*. Требуется найти аналитическое выражение F(x) табулированной функции

y_0	y_1	…	y_n
x_0	x_1	…	x_n

совпадающей в узлах интерполяции со значениями заданной функции, т. е.

$$y_0 = F(x_0) = f(x_0),\ y_1 = F(x_1) = f(x_1),\ \ldots,\ y_n = F(x_n) = f(x_n).$$

Процесс вычисления значений функции в точках x, отличных от узлов интерполяции, называют *интерполированием* функции f(x).

Если аргумент x, для которого определяется приближенное значение функции, принадлежит заданному отрезку [x_0, x_n], то задача вычисления приближенного значения функции называется *интерполированием в узком смысле*. Если аргумент x находится за пределами отрезка интерполирования

$[x_0,\ x_n]$, то задача определения значения функции в точке x называется *экстраполированием*.

Геометрически задача интерполирования для функции одной переменной $y = f(x)$ означает построение кривой, проходящей через точки плоскости с координатами $(x_0;\ y_0)$, $(x_1;\ y_1)$, ..., $(x_n;\ y_n)$ (рис. 4.1). Однако уже из рисунка интуитивно ясно, что через данные точки можно провести бесчисленное множество различных кривых. Таким образом, задача отыскания функции f(x) по конечному числу ее значений слишком неопределенна.

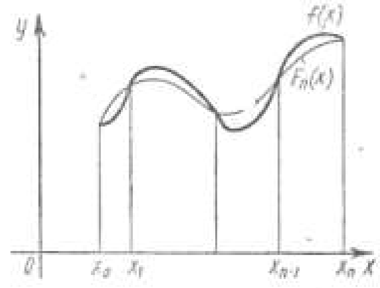


Рис. 4.1

Эта задача становится однозначной, если в качестве интерполирующей функции F(x) для функции $y = f(x)$, заданной n+1 своими значениями, выбрать многочлен $F_n(x)$ степени не выше n, такой, что

$$F_n(x_0) = y_0,\ F_n(x_1) = y_1,\ \ldots,\ F_n(x_n) = y_n.$$

Многочлен $F_n(x)$, удовлетворяющий этим условиям, называют *интерполяционным многочленом*, а соответствующие формулы — *интерполяционными формулами.*

В случае, когда F(x) выбирается в классе степенных функций, интерполяция называется *параболической*. Этот способ приближения основывается на том, что на небольших отрезках функция f(x) может быть достаточно хорошо аппроксимирована параболой определенного порядка.

Иногда целесообразно использовать другие виды интерполяции. Если интерполируемая функция f(x) — периодическая, то в качестве класса {F(x)} выбирают класс тригонометрических функций; в некоторых случаях за класс {F(x)} выбирают рациональные функции.

При интерполировании возникает ряд задач: 1) выбор наиболее удобного способа построения интерполяционной функции для каждого конкретного случая; 2) оценка погрешности при замене f(x) интерполирующей функцией F(x) на отрезке [a, b], поскольку функции F(x) и f(x) совпадают только в узлах интерполяции x_0, x_1, …, x_n; 3) оптимальный выбор узлов интерполяции для получения минимальной погрешности.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Наиболее общей формулой параболического интерполирования является интерполяционная формула Лагранжа. Задача параболического интерполирования в этом случае формулируется следующим образом: на отрезке [a, b] в узлах интерполяции x_0, x_1, …, x_n задается функция f(x) своими n + 1 значениями

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \ldots,\ y_n = f(x_n);$$

требуется построить многочлен L(x) так, чтобы в узлах интерполяции x_0, x_1, …, x_n его значения совпадали со значениями заданной функции, т. е.

$$L(x_0) = y_0,\ L(x_1) = y_1,\ \ldots,\ L(x_n) = y_n.$$

Следует отметить, что в такой постановке задачи узлы интерполяции x_0, x_1, …, x_n могут произвольно отстоять друг от друга .на отрезке [a, b], иными словами, узлы интерполяции *неравноотстоящие*, т. е. $h = x_{i+1} - x_i \neq const (i = 0, 1, \ldots, n-1)$; величина h называется *шагом интерполяции*.

Задача имеет решение, если степень многочлена L(x), которым мы заменяем неизвестную функцию f(x), не выше n.

Представим многочлен L(x) в виде

$$L_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

где a_i (i = 0, 1, ..., n) — неизвестные постоянные коэффициенты, которые нам надо найти. Из начальных условий известно, что функция $L_n(x)$ в узлах интерполяции x_0, x_1, …, x_n принимает значения $L_n(x_0) = y_0$, $L_n(x_1) = y_1$, ..., $L_n(x_n) = y_n$. Тогда в узле интерполяции x_0 интерполяционный многочлен $L_n(x)$ имеет вид

$$L_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 + \ldots + a_nx_0^n,$$

в узле интерполяции x_1 — вид

$$L_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + \ldots + a_nx_1^n$$

и т. д. Наконец, в точке x_n интерполяционный многочлен $L_n(x)$ есть

$$L_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + a_3x_n^3 + \ldots + a_nx_n^n.$$

Запишем это в виде системы n + 1 уравнений с n+1 неизвестными a_0, a_1, a_2, …, a_n:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 + \ldots + a_nx_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + \ldots + a_nx_1^n = y_1, \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 + \ldots + a_nx_2^n = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + a_3x_n^3 + \ldots + a_nx_n^n = y_n, \end{cases} \qquad (1)$$

где x_i и y_i (i =0, 1, …, n) — табличные значения аргумента и функции.

Неизвестные a_0, a_1, …, a_n найдем по формулам Крамера:

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta},\ a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ \ldots,\ a_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ — определитель системы (1). Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Действительно, определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, если x_0, x_1, …, x_n различны. Найдя коэффициенты a_0, a_1, …, a_n, можно представить интерполяционный многочлен в виде

$$L_n(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta} + \frac{\Delta_1}{\Delta} x + \frac{\Delta_2}{\Delta} x^2 + \ldots + \frac{\Delta_n}{\Delta} x^n .$$

Перепишем этот многочлен в другой форме:

$$L_n(x)=y_0Q_0(x)+y_1Q_1(x)+\ldots+y_nQ_n(x). \qquad (2)$$

Отсюда следует, что функция $Q_i(x)$ должна удовлетворять условиям

$$Q_i(x_j) = \begin{cases} 0, \textit{ если } i \neq j; \\ 1, \textit{ если } i = j. \end{cases}$$

Легко проверить, что такой многочлен имеет вид

$$Q_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} . \qquad (3)$$

В точках $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots, x_n$ функция $Q_i(x)$ обращается в 0, а в точке x_i равна 1.

Окончательно получим для формулы (2) выражение

$$L_n(x) = y_0 \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\ldots(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} + \ldots$$

$$\ldots + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}. \qquad (4)$$

Этот многочлен называется *интерполяционным многочленом Лагранжа*. В сокращенном виде его можно записать так:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} . \qquad (5)$$

Пример 1. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции заданной таблично:

	0	1	2	3
x	1	2	3	5
y	1	5	14	81

Решение. Подставляем исходные данные в формулу (4); степень полученного многочлена Лагранжа не выше третьей, так как функция задается четырьмя значениями:

$$L_3(x) = 1\cdot\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-5)} + 5\cdot\frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-5)} + 14\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-5)} +$$

$$+81\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(5-1)(5-2)(5-3)} = x^3 - 2x^2 + 3x - 1.$$

Пример 2. Функция f(x) задана таблично:

	0	1	2	3
x	0	1	2	6
y	-1	-3	3	1187

Пользуясь интерполяционным многочленом Лагранжа найти ее значение в точке x=4.

Решение. Подставляя в формулу (4) x = 4, имеем

$$L_3(x) = -1\cdot\frac{(4-1)(4-2)(4-6)}{(-1)(-2)(-6)} - 3\cdot\frac{4(4-2)(4-6)}{1(1-2)(1-6)} +$$

$$+3\cdot\frac{4(4-1)(4-6)}{2(2-1)(2-6)} + 1187\cdot\frac{4(4-1)(4-2)}{6(6-1)(6-2)} = 255.$$

Если в рассмотренном примере добавить к таблице еще одну точку, то вычисление значения функции при x = 4 придется производить заново. Кроме того, из самого примера видно, что процесс получения приближенного значения функции по интерполяционной формуле Лагранжа связан с большими вычислениями. Это приводит к необходимости упрощения вычислительной работы.

Для удобства вычислений составим вспомогательную таблицу

$x-x_0$	x_0-x_1	x_0-x_2	…	x_0-x_n	k_0
x_1-x_0	$x-x_1$	x_1-x_2	…	x_1-x_n	k_1
x_2-x_0	x_2-x_1	$x-x_2$	…	x_2-x_n	k_2
…	…	…	…	…	…
x_n-x_0	x_n-x_1	x_n-x_2	…	$x-x_n$	k_n

где x_0, x_1, x_2, ..., x_n — узлы интерполяции, а x — значение аргумента, для которого определяется приближенное значение по интерполяционной формуле Лагранжа. Обозначим произведение элементов первой строки через k_0:

$$k_0=(x-x_0)(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n). \qquad (6)$$

В общем виде произведение элементов i-й строки есть

$$k_i=(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n). \qquad (7)$$

Числа k_0, k_1, ..., k_n поместим в крайнем правом столбце таблицы. Дополнительно вычислим произведение элементов, расположенных на главной диагонали:

$$\prod\nolimits_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n). \qquad (8)$$

Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа можно переписать в виде

$$L_n(x) = \prod_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{k_i}. \qquad (9)$$

Пользуясь формулой (9), решим снова пример 2. Составим таблицу

4	-1	-2	- 6	-48
1	4-1	1-2	1-6	15
2	-1	4-2	2-6	- 16
6	6 - 1	6 - 2	4-6	-240

и найдем Π_4 (4) = - 48. Приближенное значение функции в точке x = 4, т. е. f(4) $\approx L_3(4)$, определим по формуле

$$L_3(x) = \prod_4(x)\sum_{i=0}^{3}\frac{y_i}{k_i}.$$

или

$$L_3(4) = -48\left[\frac{-1}{-48} + \frac{-3}{15} + \frac{3}{-16} + \frac{1187}{-240}\right] = 255.$$

Интерполяционная формула Лагранжа заметно упрощается, если узлы интерполяции *равноотстоящие*, т. е. $h = x_{i+1} - x_i = const$, где h — шаг интерполяции. Введем обозначение q = (x - x_0)/h. По формуле (3) имеем

$$Q_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)};$$

так как

$$\begin{aligned}
&x - x_0 = qh,\\
&x - x_1 = qh - h = h(q-1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x - x_i = qh - ih = h(q-i),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x - x_n = qh - nh = h(q-n),
\end{aligned}$$

то

$$Q_i(q) = \frac{q(q-1)..\left[q-(i-1)\right]\left[q-(i+1)\right]..(q-n)h^n}{ih(i-1)h..h(-h)..\left[-(n-i)h\right]}. \qquad (10)$$

Заметим, что часть произведения в знаменателе равна

$$ih(i-1)h..h = i/h^i$$

а другая часть равна

$$(-h)..\left[-(n-i)h\right] = (-1)^{n-i}(n-i)!h^{n-i}.$$

Умножив числитель и знаменатель правой части равенства (10) на $(-1)^{n-i}(q-i)$, получим

$$Q_i(q) = \frac{q(q-1)\ldots(q-n)(-1)^{n-i}}{(q-i)i!(n-i)!} = (-1)^{n-i}\frac{C_n^i}{q-i}\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{n!}, \tag{11}$$

где

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов интерполяции теперь можно записать в виде

$$L_n(x) = L_n(x_0 + qh) = \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\frac{C_n^i}{q-i}y_i. \tag{12}$$

5 Первая и вторая интерполяционные формулы ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции

1 Цель работы

1.1 Научиться вычислять приближение функции с помощью интерполяционных функций.

1.2 Уметь использовать пакет MathCad для решения задач интерполирования и экстраполирования.

2 Приборы и оборудования

2.1 ПК IBM PC.

2.2 Математический пакет MathCad.

3 Порядок выполнения работы

3.1 Используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона, вычислить значения функции при данных значениях аргумента. Варианты заданий см. приложение Б.

3.2 Вычисления вести с тремя знаками после запятой.

4 Содержание отчета

4.1 Цель работы.

4.2 Выполнение задания.

4.3 Вывод о проделанной работе.

5 Контрольные вопросы

5.1 Дайте определение функциональной зависимости величины y от независимых переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

5.2 Назовите способы задания функциональных зависимостей. Охарактеризуйте их.

5.3 Какая задача называется задачей интерполяции, а какая экстраполяции?

5.4 Что такое узлы интерполяции, какими они бывают?

5.5 Напишите формулу для вычисления шага интерполяции.

5.6 Какие интерполяционные формулы применяются для решения задач интерполяции? Охарактеризуйте их.

5.7 Как находятся конечные разности различных порядков через значения функции в узловых точках?

5.8 Когда целесообразно применять первую интерполяционную формулу Ньютона, а когда вторую?

5.9 Как находятся разделенные разности различных порядков через значения функции в узловых точках?

5.10 В каких интерполяционных формулах применяются разделенные разности?

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ

1.1 Используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона, вычислить значения функции при данных значениях аргумента.

$$x := \begin{pmatrix} 1.215 \\ 1.220 \\ 1.225 \\ 1.230 \\ 1.235 \\ 1.240 \\ 1.245 \\ 1.250 \\ 1.255 \\ 1.260 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 0.106044 \\ 0.113276 \\ 0.119671 \\ 0.125324 \\ 0.130328 \\ 0.134776 \\ 0.138759 \\ 0.142367 \\ 0.145688 \\ 0.148809 \end{pmatrix}$$

$n := 9$

Конечные разности

$i := 1..n-1$

$\Delta y_{i-1} := y_i - y_{i-1}$

$i := 1..n-2$

$\Delta 2y_{i-1} := \Delta y_i - \Delta y_{i-1}$

$i := 1..n-3$

$\Delta 3y_{i-1} := \Delta 2y_i - \Delta 2y_{i-1}$

$$\Delta y = \begin{pmatrix} 0.007232 \\ 0.006395 \\ 0.005653 \\ 0.005004 \\ 0.004448 \\ 0.003983 \\ 0.003608 \\ 0.003321 \end{pmatrix} \qquad \Delta 2y = \begin{pmatrix} -0.000837 \\ -0.000742 \\ -0.000649 \\ -0.000556 \\ -0.000465 \\ -0.000375 \\ -0.000287 \end{pmatrix} \qquad \Delta 3y = \begin{pmatrix} 0.000095 \\ 0.000093 \\ 0.000093 \\ 0.000091 \\ 0.00009 \\ 0.000088 \end{pmatrix}$$

Первая формула Ньютона

$X1 := 1.227 \quad h := x_1 - x_0 \quad h = 0.005 \quad q := \dfrac{X1 - x_2}{h} \quad q = 0.46$

$$L(X1) := y_2 + q\cdot\Delta y_2 + \frac{q\cdot(q-1)}{2!}\cdot\Delta 2y_2 + \frac{q\cdot(q-1)\cdot(q-2)}{3!}\cdot\Delta 3y_2$$

$L(X1) = 0.122358$

Вторая формула Ньютона

$X1 := 1.253 \quad h := x_1 - x_0 \quad h = 0.005 \quad q := \dfrac{X1 - x_8}{h} \quad q = -0.4$

$$L(X1) := y_8 + q\cdot\Delta y_7 + \frac{q\cdot(q+1)}{2!}\cdot\Delta 2y_6 + \frac{q\cdot(q+1)\cdot(q+2)}{3!}\cdot\Delta 3y_5$$

$L(X1) = 0.144388$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица №4

x	y
1,415	0,888551
1,420	0,889599
1,425	0,890637
1,430	0,891667
1,435	0,892687
1,440	0,893698
1,445	0,894700
1,450	0,895693
1,455	0,896677
1,460	0,897653
1,465	0,898619

№ варианта	X1	X2	X3	X4
1	1,4161	1,4625	1,4135	1,470
6	1,4179	1,4633	1,4124	1,4655
11	1,4263	1,4575	1,410	1,4662

Таблица №5

x	y
0,101	1,26183
0,106	1,27644
0,111	1,29122
0,116	1,30617
0,121	1,32130
0,126	1,33660
0,131	1,35207
0,136	1,36773
0,141	1,38357
0,146	1,39959
0,101	1,26183

№ варианта	X1	X2	X3	X4
2	0,1026	0,1440	0,099	0,161
7	0,1035	0,1492	0,096	0,153
12	0,1074	0,1485	0,1006	0,156

Таблица №6

x	y
0,15	0,860708
0,20	0,818731
0,25	0,778801
0,30	0,740818
0,35	0,704688
0,40	0,670320
0,45	0,637628
0,50	0,606531
0,55	0,576950
0,60	0,548812
0,65	0,522046

№ варианта	X1	X2	X3	X4
3	0,1511	0,7250	0,1430	0,80
8	0,1535	0,7333	0,100	0,7540
13	0,1525	0,6730	0,1455	0,85

Таблица №7

x	y
0,180	5,61543
0,185	5,46693
0,190	5,32634
0,195	5,19304
0,200	5,06649
0,205	4,94619
0,210	4,83170
0,215	4,72261
0,220	4,61855
0,225	4,51919
0,230	4,42422

№ варианта	X1	X2	X3	X4
4	0,1817	0,2275	0,175	0,2875
9	0,1827	0,2292	0,1776	0,240
14	0,1873	0,2326	0,1783	0,245

Таблица №8

x	y
3,50	33,1154
3,55	34,8133
3,60	36,5982
3,65	38,4747
3,70	40,4473
3,75	42,5211
3,80	44,7012
3,85	46,9931
3,90	49,4024
3,95	51,9354
4,00	54,5982

№ варианта	X1	X2	X3	X4
5	3,522	4,176	3,475	4,25
10	3,543	4,184	3,488	4,30
15	3,575	4,142	3,45	4,204

ПРИЛОЖЕНИЕ В
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ
Конечные разности

Табулирование функций в большинстве случаев производится для равноотстоящих значений аргумента, т. е. $x_i = x_0 + ih$, где i = 0, 1, 2, ..., n, а h — шаг интерполяции.

Для вывода интерполяционных формул для равноотстоящих узлов интерполяции введем понятие *конечной разности*.

Поставим следующую задачу: для функции y = f(x), заданной таблично своими значениями

$$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\ \ldots, y_n=f(x_n)$$

в равноотстоящих узлах интерполяции, построить таблицу конечных разностей.

Назовем *конечной разностью первого порядка* разность между значениями функции в соседних узлах интерполяции. Тогда конечные разности в точках x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1} определяются соответственно как

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0) = \Delta f(x_0),$$
$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = \Delta f(x_1),$$
$$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = f(x_3) - f(x_2) = \Delta f(x_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} = f(x_n) - f(x_{n-1}) = \Delta f(x_{n-1}),$$

где h=const.

В общем виде первая конечная разность запишется так:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i,$$

или

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x). \qquad (1)$$

В математической литературе используются несколько обозначений конечных разностей:

$$\Delta y_i = y_{i+1},\ \delta y_{i+1/2} = y_{i+1} - y_i,\ f'_{i+1/2} = y_{i+1} - y_i.$$

Из конечных разностей первого порядка можно образовать *конечные разности второго порядка*:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i,\ \delta^2 y_i = \delta y_{i+1/2} - \delta y_{i-1/2},\ f_i^2 = f'_{i+1/2} - f'_{i-1/2}.$$

Первая запись второй конечной разности удобна для составления *горизонтальных* таблиц конечных разностей (табл. 4.5). Последней записью пользуются для составления *диагональных* таблиц конечных разностей (табл. 4.6). Мы будем пользоваться первым обозначением.

В общем виде конечная разность n-го порядка записывается так:

$$\Delta_y^n = \Delta\left(\Delta^{n-1} y\right). \qquad (2)$$

Таблица 4.5

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
$x_1=x_0+h$	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	

$x_2=x_0+2h$	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$		
$x_3=x_0+3h$	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$			
$x_4=x_0+4h$	y_4	Δy_4				
$x_5=x_0+5h$	y_5					

Таблица 4.6

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
		Δy_0			
$x_1=x_0+h$	y_1		$\Delta^2 y$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
$x_2=x_0+2h$	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
$x_3=x_0+3h$	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
$x_4=x_0+4h$					

Для составления некоторых интерполяционных формул используют таблицы *центральных разностей*, отличие которых от диагональных таблиц хорошо видно из сравнения таблиц 4.6 и 4.7.

В таблице центральных разностей x_0 и y_0 расположены в середине столбца.

Таблица 4.7

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
…	…	…	…	…	…	…	…
x_{-3}	y_{-3}						
		Δy_{-3}					
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$				
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$			
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$		
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		$\Delta^5 y_{-3}$	
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$		$\Delta^6 y_{-3}$
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		$\Delta^5 y_{-2}$	
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$			
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$				
		Δy_2					
x_3	y_3						

Конечные разности обычно принято записывать в единицах последнего знака соответствующей конечной разности без нулей впереди (табл. 4.8).

Таблица 4.8

x	y	Δy	Δ^2y	Δ^3y
1,70	5,4739	551	4	3
1,71	5,5290	555	7	-3
1,72	5,5845	562	4	
1,73	5,6407	566		
1,74	5,6973			

Рассмотрим некоторые свойства конечных разностей. По определению

$$\Delta y_i = (x_i + \Delta x) - f(x_i) = y_{i+1} - y_i,$$

а вторая конечная разность в точке x_i есть

$$\Delta^2 y_i = \left[f(x_{i+1} + \Delta x) - f(x_i + \Delta x)\right] - \left[f(x_{i+1}) - f(x_i)\right] =$$
$$= f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i.$$

Выразим третью конечную разность в точке x_i через значения функции:

$$\Delta^3 y_i = \Delta\left(\Delta^2 y_i\right) = \left[f\left(x_{i+2} + \Delta x\right) - 2f\left(x_{i+1} + \Delta x\right) + f\left(x_i + \Delta x\right)\right] -$$
$$- \left[f\left(x_{i+2}\right) - 2f\left(x_{i+1}\right) + f\left(x_i\right)\right] = f\left(x_{i+3}\right) - 3f\left(x_{i+2}\right) + \quad .$$
$$+ 3f\left(x_{i+1}\right) - f(x_i) = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i.$$

Покажем, что общее выражение для конечной разности n-го порядка имеет вид

$$\Delta^n y_i = y_{n+1} - C_n^1 y_{n+i-1} + C_n^2 y_{n+i-2} - \ldots + (-1)^m C_n^m y_{n+i-m} + \ldots + (-1)^n y_i. \tag{3}$$

При n = 1, 2, 3 формула (3) справедлива. Предположим, что она верна для n-й конечной разности, и докажем ее справедливость для (n + 1)-й конечной разности:

$$\Delta^{n+1} y_i = \Delta\left(\Delta^n y_i\right) = \Delta^n y_{i+1} - \Delta^n y_i = \left[y_{n+i+1} - C_n^1 y_{n+i} + C_n^2 y_{n+i-1} - \ldots + (-1)^m C_n^m y_{n+i+1-m} + \ldots + (-\right.$$
$$\left[y_{n+i} - C_n^1 y_{n+i-1} + C_n^2 y_{n+i-2} - \ldots + (-1)^m C_n^m y_{n+i-m} + \ldots + (-1)^n y_i\right]$$

Так как

$$C_n^m + C_n^{m+1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!} = C_{n+1}^{m+1},$$

то, следовательно,

$$\Delta^{n+1} y_i = y_{n+i+1} - C_{n+1}^1 y_{n+i} + C_{n+1}^2 y_{n+i-1} + \ldots + (-1)^m C_{n+1}^m y_{n+i+1-m} + \ldots + (-1)^{n+1} y_i,$$

что и требовалось доказать.

Отметим следующие свойства конечных разностей.

1. *Конечная разность $\Delta^n u$ суммы или разности функций $u=\phi+g$ есть сумма или разность конечных разностей функций*:

$$\Delta^n u_i = \Delta^n\left(\varphi_i + g_i\right) = \Delta^n \varphi_i + \Delta^n g_i.$$

2. *При умножении функции на постоянный множитель конечные разности умножаются на тот же множитель*.

3. *Конечная разность m-го порядка от конечной разности n-го порядка равна конечной разности (m + n)-го порядка*:

$$\Delta^m\left(\Delta^n y\right) = \Delta^{m+n} y.$$

4. *Конечные разности n-го порядка от многочлена степени n постоянны, а конечные разности (n + 1)-го порядка равны нулю*.

Следует заметить, что на конечных разностях более высоких порядков заметно сказываются ошибки округления. Пусть одно из значений функции содержит ошибку, равную ε. Из табл. 4.9 видно, что влияние ошибки на конечные разности возрастает с увеличением их порядка.

Таблица 4.9

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
…	…	…	…	…
x_{n-2}	y_{n-2}			
		Δy_{n-2}		
x_{n-1}	y_{n-1}		$\Delta^2 y_{n-2}+\varepsilon$	
		$\Delta y_{n-1}+\varepsilon$		$\Delta^3 y_{n-2}-3\varepsilon$
x_n	$y_n+\varepsilon$		$\Delta^2 y_{n-1}-2\varepsilon$	
		$\Delta y_n-\varepsilon$		$\Delta^3 y_{n-1}+3\varepsilon$
x_{n+1}	y_{n+1}		$\Delta^2 y_n+\varepsilon$	
		Δy_{n+1}		
x_{n+2}	y_{n+2}			
…	…	…	…	…

Пример 1. Составить горизонтальную таблицу конечных разностей функции $y=x^3+3x^2-x-1$ от начального значения x = 0, приняв шаг h = 1.

Решение. Полагая $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, ,.., находим соответствующие значения y_0, y_1, y_2, …:

$x_0=0$, $y_0=-1$; $x_1=1$, $y_1=2$; $x_2=2$, $y_2=17$; $x_3=3$, $y_3=50$; $x_4=4$, $y_4=107$; $x_5=5$, $y_5=194$; … .

Найдем конечные разности первого порядка:

$$\Delta y_0=y_1-y_0=2+1=3;$$
$$\Delta y_1=y_2-y_1=17-2=15;$$
$$\Delta y_2=y_3-y_2=50-17=33;$$
$$\Delta y_3=y_4-y_3=107-50=57;$$
$$\Delta y_4=y_5-y_4=194-107=87; \dots .$$

Найдем конечные разности второго порядка:

$\Delta^2 y_0=\Delta y_1-\Delta y_0=15-3=12;$

$\Delta^2 y_1=\Delta y_2-\Delta y_1=33-15=18;$

$\Delta^2 y_2=\Delta y_3-\Delta y_2=57-33=24;$

$\Delta^2 y_3=\Delta y_4-\Delta y_3=87-57=30; \dots .$

Определяем конечные разности третьего порядка:

$\Delta^3 y_0=\Delta^2 y_1-\Delta^2 y_0=18-12=6;$

$\Delta^3 y_1=\Delta^2 y_2-\Delta^2 y_1=24-18=6;$

$$\Delta^3 y_2=\Delta^2 y_3-\Delta^2 y_2=30-24=6;\dots .$$

Мы видим, что третьи конечные разности $\Delta^3 y_0$, $\Delta^3 y_1$, $\Delta^3 y_2$, … постоянны. Это объясняется тем, что функция f(x) есть многочлен третьей степени. Третью конечную разность можно вычислить также по формуле

$$\Delta^n P_n(x) = n! a_0 h^n = const,$$

т. е. $\Delta^3 P_3(x) = 3! \cdot 1 \cdot 1^3 = 6$, а конечные разности четвертого порядка равны нулю.

Составим таблицу конечных разностей (табл. 4.10):

Таблица 4.10

x	y	Δy	Δ^2y	Δ^3y	Δ^4y
0	-1	3	12	6	0
1	2	15	18	6	0
2	17	33	24	6	
3	50	57	30		
4	107	87			
5	194				

В дальнейшем при вычислениях целесообразно сразу же заносить конечные разности в таблицу.

Пример 2. Найти конечные разности второго порядка для функции, заданной таблично:

x	2	4	6	8	10
y	3,146	4,028	4,911	5,796	6,680

Решение. Составим таблицу конечных разностей, как и в примере 1:

x	y	Δy	Δ^2y	Δ^3y
2	3,146	882	1	1
4	4,028	883	2	-1
6	4,911	885	1	
8	5,796	884		
10	6,680			

Первая интерполяционная формула Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции

Вычисление значений функции для значений аргумента, лежащих в начале таблицы, удобно проводить, пользуясь первой интерполяционной формулой Ньютона.

Пусть функция f(x) задана значениями

$$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\ \ldots,\ y_n=f(x_n)$$

в равноотстоящих узлах интерполяции x_0, $x_1 = x_0 + h$, …, $x_n=x_0+nh$. Требуется построить интерполяционный многочлен $P_n(x)$ степени n такой, что

$$P_n(x_0)=y_0,\ P_n(x_1)=y_1,\ \ldots,\ P_n(x_n)=y_n.$$

В силу единственности многочлена степени n, построенного по n + 1 значениям функции f(x), многочлен $P_n(x)$ является разновидностью записи интерполяционного многочлена и в конечном счете совпадает с многочленом, полученным по формуле Лагранжа.

Будем искать полином в виде

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \\ &+ a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) \end{aligned} \quad (1)$$

В этом выражении нам неизвестны коэффициенты a_0, a_1, ..., a_n. Для того чтобы найти a_0, положим $x = x_0$. Тогда при подстановке $x = x_0$ в выражение (1) все слагаемые, кроме первого, обратятся в нуль, т, е. $P_n(x_0) = a_0$, а значение функции в точке x_0 известно из условия задачи: $P_n(x_0) = y_0$. Следовательно, $a_0 = y_0$.

Чтобы найти коэффициент a_1 составим первую конечную разность для многочлена $P_n(x)$ в точке x. Согласно определению конечной разности, имеем

$$\Delta P_n(x) = P_n(x+h) - P_n(x).$$

Произведя подстановку, получим

$$\begin{aligned} \Delta P_n(x) &= [a_0 + a_1(x-x_0+h) + a_2(x-x_0+h)(x-x_1+h) + a_3(x-x_0+h)(x-x_1+h)(x-x_2+h) + \ldots \\ &\ldots + a_n(x-x_0+h)(x-x_1+h)\ldots(x-x_{n-1}+h)] - [a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)\times \\ &\times(x-x_1)(x-x_2) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})] = a_1[(x-x_0+h)-(x-x_0)] + a_2[(x-x_0+h)\times \\ &\times(x-x_1+h) - (x-x_0)(x-x_1)] + a_3[(x-x_0+h)(x-x_1+h)(x-x_2+h) - (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)] + \\ &+ \ldots + a_n[(x-x_0+h)(x-x_1+h)\ldots(x-x_{n-1}+h) - (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})] = ha_1 + 2ha_2 \times \\ &\times(x-x_0) + 3ha_3(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + nha_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-2}). \end{aligned}$$

Вычислим первую конечную разность многочлена $P_n(x)$ в точке x_0. Здесь также все члены, кроме первого, обратятся в нуль, и, следовательно, $\Delta P_n(x_0) = a_1h$, но

$$\Delta P_n(x_0)=f(x_1)-f(x_0)=y_1-y_0=\Delta y_0.$$

откуда $\Delta y_0= a_1h$ и

$$a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

Чтобы определить коэффициент a_2, составим конечную разность второго порядка:

$$\Delta^2 P_n(x) = \Delta P_n(x+h) - \Delta P_n(x).$$

После преобразований получим

$$\Delta^2 P_n(x) = 2!h^2a_2 + 2\cdot 3\cdot h^2a_3(x-x_0) + \ldots + (n-1)nh^2a_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-3}).$$

Полагаем $x = x_0$; тогда все члены, кроме первого, опять обратятся в нуль и $\Delta^2 P_n(x_0) = \Delta^2 y_0 = 2!h^2a_2$. Отсюда

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}.$$

Вычисляя конечные разности более высоких порядков и полагая x = x_0, придем к общей формуле для получения коэффициентов:

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!h^i} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

где будем считать, что 0! = 1 и $\Delta^0 y$ = y. Подставив найденные значения коэффициентов a_i в выражение (1), получим *первую интерполяционную формулу Ньютона*

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}) \tag{2}$$

На практике часто используют формулу Ньютона в другом виде. Для этого введем переменную q = (x –x_0)/h, где h — шаг интерполяции, а q — число шагов. Тогда первая интерполяционная формула Ньютона примет следующий вид:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{h!}\Delta^n y_0. \tag{3}$$

Формулу (3) удобно использовать для интерполирования в начале отрезка интерполяции [a, b], где q мало по абсолютной величине.

Если за число узлов интерполяции принять n = 1, то получим формулу *линейного интерполирования*

$$P(x) = y + q\Delta y_0.$$

При n = 2 получим формулу *параболического*, или *квадратичного, интерполирования*

$$P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0.$$

На практике часто бывает необходимо сгустить шаг интерполяции какой-нибудь таблицы с равноотстоящими аргументами. В таблице можно считать, что число узлов интерполяции неограничено. Тогда выбирают n так, чтобы конечная разность $\Delta^n y_i$ была постоянна с заданной степенью точности. За начальное значение x_0 можно выбирать любое значение аргумента.

Пример. В табл. 4.11 даны значения функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Таблица 4.11

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
2,0	0,0540	- 100	15	-2
2,1	440	-85	13	0
2,2	355	-72	13	-3
2,3	283	-59	10	-10
2,4	224	-49	0	
2,5	175	-49		
2,6	136			

Применяя первую интерполяционную формулу Ньютона, найти ϕ(2,22).

Решение. Строим конечные разности функции ϕ(x); ограничимся третьей конечной разностью. За x принимаем число, наиболее близкое к заданному, т. е. полагаем x = 2,2. Так как шаг h = 0,1, то

$$q = \frac{2{,}22 - 2{,}20}{0{,}1} = \frac{0{,}02}{0{,}1} = 0{,}2.$$

Используя формулу (3), находим

$$y = 0{,}0355 + 0{,}2(-0{,}0072) + \frac{0{,}2(0{,}2-1)}{2!}0{,}0013 + \frac{0{,}2(0{,}2-1)(0{,}2-2)}{3!}(-0{,}0003) = 0{,}0339.$$

Вторая интерполяционная формула Ньютона

Для интерполирования в конце таблицы обычно применяют вторую интерполяционную формулу Ньютона.

Пусть на отрезке [a, b] даны n + 1 различных значений аргумента x_0, x_1 ,.,, x_n, которым соответствуют значения функции

$$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\ \ldots,\ y_n=f(x_n),$$

а шаг интерполяции постоянен и равен h, т, е, $x_{i+1}= x_i + h$ (i = 0, 1, 2, ..., n - 1). Построим интерполяционный многочлен вида

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_n)+a2(x-x_n)(x-x_{n-1})+a_3(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})+\ldots+a_n(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1). \quad (1)$$

В этом многочлене неизвестны коэффициенты a_0, a_1, a_2, …, a_n. Их надо подобрать так, чтобы были выполнены равенства

$$P_n(x_0) = y_0,\ P_n(x_1) = y_1,\ \ldots,\ P_n(x_n) = y_n.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta^i P_n(x_{n-i}) = \Delta^i y_{n-i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n). \quad (2)$$

Коэффициент a_0 найдем, положив $x = x_n$ в равенстве (1):

$$P_n(x_n) = y_n = a_0,$$

откуда

$$a_0 = y_n.$$

Из выражения для первой конечной разности найдем a_1:

$$\Delta P_n(x) = 1\cdot ha_1 + 2ha_2(x-x_{n-1}) + 3ha_3(x-x_{n-2})(x-x_{n-1}) + \ldots + nha_n(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})\ldots(x-x_1).$$

Отсюда, полагая $x = x_{n-1}$ и учитывая соотношение (2), имеем

$$\Delta P_n(x_{n-1}) = \Delta y_{n-1} = a_1 h.$$

Следовательно,

$$a_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{n}.$$

Из выражения для второй конечной разности найдем a_2:

$$\Delta^2 P_n(x) = 2!h^2 a_2 + 2\cdot 3\cdot h^2 a_3(x - x_{n-2}) + \ldots + n(n-1)h^2 a_n(x - x_1)\ldots(x - x_{n-2}).$$

Полагая $x = x_{n-2}$, получим

$$\Delta^2 P_n(x_{n-2}) = \Delta^2 y_{n-2} = 2!h^2 a_2,$$

откуда

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}.$$

Методом математической индукции можно доказать, что

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i!h^i} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Подставив найденные значения коэффициентов в формулу (1), получим

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)\ldots(x - x_1). \tag{3}$$

Это и есть *вторая интерполяционная формула Ньютона*.

На практике используют формулу Ньютона в другом виде. Положим $q = (x - x_n)/h$; тогда

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - x_n + h}{h} = q + 1, \quad \frac{x - x_{n-2}}{h} = q + 2, \ldots$$

и формула (3) примет вид

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \ldots + \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \tag{4}$$

Первая интерполяционная формула Ньютона используется для интерполирования в начале отрезка [a, b], т, е. для *интерполирования вперед* и *экстраполирования назад*. При интерполировании по первой формуле Ньютона $q=(x-x_0)/h > 0$. При экстраполировании назад также используют первую интерполяционную формулу Ньютона, но в этом случае $q=(x-x_0)/h < 0$.

При интерполировании в конце таблицы, т. е. *интерполировании назад*, когда шаг интерполяции постоянен, используют вторую формулу Ньютона, где $q = (x - x_n)/h < 0$. Вторая интерполяционная формула Ньютона применяется и при *экстраполировании вперед*, тогда $q = (x - x_n)/h > 0$.

Пример. В табл. 4.12 приведены значения интеграла вероятностей:

Таблица 4.12

x	y	Δy	Δ^2y	Δ^3y
0,1	0,03983	3943	- 78	-36
0,2	0,07926	3865	- 114	-33
0,3	0,11791	3751	- 147	-28
0,4	0,15542	3604	- 175	
0,5	0,19146	3429		
0,6	0,22575			

Требуется вычислить y(0,58).

Решение. Здесь шаг интерполяции h = 0,1. Отсюда

$$q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{0{,}58 - 0{,}6}{0{,}1} = -\frac{0{,}02}{0{,}1} = -0{,}2.$$

Для нахождения y (0,58) воспользуемся второй интерполяционной формулой Ньютона:

$$P_3(0{,}58) = 0{,}22575 + (-0{,}2)0{,}03429 + \frac{(-0{,}2)(-0{,}2+1)}{2!}(-0{,}00175) +$$

$$+ \frac{(-0{,}2)(-0{,}2+1)(0{,}2+2)}{3!}(-0{,}00028) = 0{,}21904.$$

6 Интерполяционная формулы Ньютона для неравноотстоящих узлов интерполяции

1 Цель работы

1.1 Научиться вычислять приближение функции с помощью интерполяционных функций.

1.2 Уметь использовать пакет MathCad для решения задач интерполирования и экстраполирования.

2 Приборы и оборудования

2.1 ПК IBM PC.

2.2 Математический пакет MathCad.

3 Порядок выполнения работы

3.1 Вычислить значение функции при заданных значениях аргумента, используя интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих узлов интерполяции. Варианты заданий см. приложение Б.

3.2 Вычисления вести с тремя знаками после запятой.

4 Содержание отчета

4.1 Цель работы.

4.2 Выполнение задания.

4.3 Вывод о проделанной работе.

5 Контрольные вопросы

5.1 Дайте определение функциональной зависимости величины y от независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

5.2 Назовите способы задания функциональных зависимостей. Охарактеризуйте их.

5.3 Какая задача называется задачей интерполяции, а какая экстраполяции?

5.4 Что такое узлы интерполяции, какими они бывают?

5.5 Напишите формулу для вычисления шага интерполяции.

5.6 Какие интерполяционные формулы применяются для решения задач интерполяции? Охарактеризуйте их.

5.7 Как находятся конечные разности различных порядков через значения функции в узловых точках?

5.8 Когда целесообразно применять первую интерполяционную формулу Ньютона, а когда вторую?

5.9 Как находятся разделенные разности различных порядков через значения функции в узловых точках?

5.10 В каких интерполяционных формулах применяются разделенные разности?

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ

1.1 Вычислить значение функции при заданных значениях аргумента, используя интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих узлов интерполяции.

$$x := \begin{pmatrix} 0.103 \\ 0.108 \\ 0.115 \\ 0.120 \\ 0.128 \\ 0.136 \\ 0.141 \\ 0.150 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 2.01284 \\ 2.03342 \\ 2.06070 \\ 2.07918 \\ 2.10721 \\ 2.13354 \\ 2.14922 \\ 2.17609 \end{pmatrix}$$

$n := 7$

Разделенные разности

$i := 1..n-1$

$$f1_{i-1} := \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \qquad i := 1..n-2$$

$$f2_{i-1} := \frac{f1_i - f1_{i-1}}{x_{i+2} - x_i}$$

$$f1 = \begin{pmatrix} 4.116 \\ 3.89714 \\ 3.696 \\ 3.50375 \\ 3.29125 \\ 3.136 \end{pmatrix} \qquad f2 = \begin{pmatrix} -18.2381 \\ -15.47253 \\ -12.01563 \\ -16.34615 \\ -11.08929 \end{pmatrix}$$

$X1 := 0.112$

$L(X1) := y_1 + (X1 - x_1)f1_1 + (X1 - x_1)\cdot(X1 - x_2)\cdot f2_1$

$L(X1) = 2.04919$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица № 1

x	y
0,298	3,25578
0,303	3,17639
0,310	3,12180
0,317	3,04819
0,323	2,98755
0,330	2,91950
0,339	2,83598

№ варианта	X1	X2
1	0,308	0,335
4	0,314	0,337
7	0,325	0,303
10	0,312	0,304
13	0,321	0,336

Таблица №2

x	y
0,593	0,532050
0,598	0,535625
0,605	0,540598
0,613	0,546235
0,619	0,550431
0,627	0,555983
0,632	0,559428

№ варианта	X1	X2
2	0,608	0,630
5	0,615	0,594
8	0,622	0,596
11	0,603	0,631
14	0,610	0,628

Таблица №3

x	y
0,698	2,22336
0,706	2,24382
0,714	2,26446
0,727	2,29841
0,736	2,32221
0,747	2,35164
0,760	2,38690

№ варианта	X1	X2
3	0,720	0,755
6	0,740	0,705
9	0,750	0,777
12	0,765	0,700
15	0,755	0,704

ПРИЛОЖЕНИЕ В

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

РАЗДЕЛЬНЫЕ РАЗНОСТИ.

При проведении приближенных вычислений, когда значения функции задаются в неравноотстоящих узлах интерполяции, вводят понятие *раздельные разности*, обобщающее понятие конечной разности.

Пусть функция y=f(x) задана своими значениями

$$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\ \ldots,\ y_n=f(x_n)$$

в неравноотстоящих узлах интерполяции x_0, x_1, …, x_n. Отношения

$$[x_0; x_1]=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},\quad [x_1; x_2]=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\ \ldots,\quad [x_i; x_{i+1}]=\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}$$

назовем *раздельными разностями первого порядка.*

Определим *раздельные разности второго порядка* как следующие отношения:

$$[x_0, x_1, x_2]=\frac{[x_1; x_2]-[x_0; x_1]}{x_2-x_0},$$

$$[x_1, x_2, x_3]=\frac{[x_2; x_3]-[x_1; x_2]}{x_3-x_1},$$

……………………………………………

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]=\frac{[x_{i+1}; x_{i+2}]-[x_i; x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i}$$

Зная раздельную разность (k-1)-го порядка $[x_i;\ x_{i+1};\ \ldots;\ x_{i+k-1}]$, можно определить *раздельную разность k-го порядка* следующим образом:

$$[x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+k}]=\frac{[x_{i+1}; x_{i+2}; \ldots; x_{i+k}]-[x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}.$$

Иногда раздельные разности первого порядка обозначают так:

$$f(x_0; x_1), f(x_1; x_2), \ldots, f(x_i; x_{i+1}),$$

раздельную разность второго порядка соответственно

$$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}),$$

тогда для раздельной разности k-го порядка в общем случае используют выражение

$$f(x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+k}).$$

Составим диагональную таблицу раздельных разностей (табл. 4.13).

Таблица 4.13.

x_i	$y_i=f(x_i)$	$[x_i; x_{i+1}]$	$[x_i; x_{i+1}; x_{i+2}]$	$[x_i; x_{i+1}; x_{i+2}; x_{i+3}]$	$[x_i; x_{i+1}; x_{i+2}; x_{i+3}; x_{i+4}]$
x_0	y_0				
		$[x_0; x_1]$			
x_1	y_1		$[x_0; x_1; x_2]$		
		$[x_1; x_2]$		$[x_0; x_1; x_2; x_3]$	
x_2	y_2		$[x_1; x_2; x_3]$		$[x_0; x_1; x_2; x_3; x_4]$
		$[x_2; x_3]$		$[x_1; x_2; x_3; x_4]$	
x_3	y_3		$[x_2; x_3; x_4]$		
		$[x_3; x_4]$			
x_4	y_4				

Пример. Составить таблицу раздельных разностей для следующих значений x и y:

x	0	1	5	10
y	10	20	100	1100

Решение. Пользуясь непосредственно определением, находим раздельные разности первого порядка:

$$[x_0; x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{20-10}{1-0} = 10;$$

$$[x_1; x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100-20}{5-1} = \frac{80}{4} = 20;$$

$$[x_2; x_3] = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{1100-100}{10-5} = \frac{1000}{5} = 200.$$

Аналогично найдем раздельные разности второго порядка:

$$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_1; x_2] - [x_0; x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{20-10}{5-0} = 0;$$

$$[x_1, x_2, x_3] = \frac{[x_2; x_3] - [x_1; x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{200-20}{10-1} = \frac{180}{9} = 20;$$

Раздельная разность третьего порядка:

$$[x_0; x_1; x_2; x_3] = \frac{[x_1; x_2; x_3] - [x_0; x_1; x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{20-2}{10} = 1.8.$$

Результаты вычислений сведем в диагональную таблицу раздельных разностей:

x	y	$[x_i, x_{i+1}]$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	10			
		10		
1	20		2	
		20		1.8
5	100		10	
		200		
10	1100			

ПЕРВАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА НЬЮТОНА ДЛЯ НЕРАВНООТСТОЯЩИХ УЗЛОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ.

Пусть функция f(x) задана значениями

$$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\ \ldots,\ y_n=f(x_n)$$

в неравноотстоящих узлах интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Требуется построить интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих узлов интерполяции, так чтобы в узлах интерполяции

$$y_0=P(x_0),\ y_1=P(x_1),\ \ldots,\ y_n=P(x_n).$$

Построим первую раздельную разность

$$[x; x_0]=\frac{P(x)-P(x_0)}{x-x_0},$$

тогда

$$P(x)=P(x_0)+[x; x_0](x-x_0). \qquad (1)$$

Вторая раздельная разность

$$[x_0; x_1; x_2]=\frac{[x; x_0]-[x_0; x_1]}{x-x_1},$$

откуда

$$[x; x_0]=[x_0; x_1]+[x; x_0; x_1](x-x_1). \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в (1), получим

$$P(x)=P(x_0)+[x_0; x_1](x-x_0)+[x; x_0; x_1](x-x_0)(x-x_1). \qquad (3)$$

Из определения третьей раздельной разности получим

$$[x; x_0; x_1; x_2]=\frac{[x; x_0; x_1]-[x_0; x_1; x_2]}{x-x_2},$$

т.е.

$$[x; x_0; x_1]=[x_0; x_1; x_2]+[x; x_0; x_1; x_2](x-x_2). \qquad (4)$$

Подставим вторую раздельную разность (4) в выражение (3), тогда, используя третью раздельную разность, можно представить многочлен P(x) в следующем виде:

$$P(x)=P(x_0)+[x_0; x_1](x-x_0)+[x_0; x_1; x_2](x-x_0)(x-x_1)+[x; x_0; x_1; x_2](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2). \qquad (5)$$

Продолжая далее этот процесс, получим

$$P(x)=P(x_0)+[x_0; x_1](x-x_0)+[x_0; x_1; x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots+[x_0; x_1; \ldots; x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}). \qquad (6)$$

Эта формула носит название *интерполяционного многочлена Ньютона для неравноотстоящих узлов интерполяции.*

Преимущество этой формулы по сравнению с формулой Лагранжа состоит в том, что добавление новых узлов интерполяции не приводит к проведению расчетов заново.

7 Вычисление интеграла по формулам правых и левых прямоугольников

1 Цель работы

1.1 Научиться вычислять интегралы по формулам правых и левых прямоугольников.
1.2 Научиться использовать пакет MathCad для численного интегрирования.

2 Приборы и оборудования

2.1 ПК IBM PC.
2.2 Математический пакет MathCad.

3 Порядок выполнения работы

3.1 Вычислить интегралы по формулам:
- правых и левых прямоугольников.

Для проверки найти точное решение определенного интеграла, с используя математический пакета MathCad. Варианты заданий см. в приложение Б.
3.2 Все вычисления вести с тремя знаками после запятой.

4 Содержание отчета

4.1 Цель работы.
4.2 Выполнение задания.
4.3 Вывод о проделанной работе.

5 Контрольные вопросы

5.1 В чем состоит задача численного интегрирования, численного дифференцирования?
5.2 Какие квадратурные формулы используются для численного интегрирования?
5.3 Какие интерполяционные формулы используются для численного дифференцирования?
5.4 Как в MathCad вычислить точное значение определенного интеграла? Аналитическое выражение неопределенного интеграла?

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ

1.1 Вычислить интегралы по формулам

$$\int_{2.6}^{3.8} \frac{\cos(2 \cdot x) + 0.5}{\sqrt{x^2 + 1.5}}\,dx = 0.451$$

$b := 3.8 \quad a := 2.6 \quad n := 6 \quad h := \frac{b - a}{n} \quad h = 0.2$

$x_0 := a \quad i := 0..n \quad x_{i+1} := x_i + h \quad f(x) := \frac{\cos(2 \cdot x) + 0.5}{\sqrt{x^2 + 1.5}}$

$$x = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 2.8 \\ 3 \\ 3.2 \\ 3.4 \\ 3.6 \\ 3.8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$f(x_i) =$

0.337
0.417
0.451
0.436
0.379
0.291
0.188

левых прямоугольников

$$I1 := h \cdot \sum_{i=0}^{5} f(x_i)$$

$I1 = 0.462$

правых прямоугольников

$$I2 := h \cdot \sum_{i=1}^{6} f(x_i)$$

$I2 = 0.432$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 1

Номер варианта	**Интеграл 1**	**Интеграл 2**
1	$\int_{0.8}^{1.6}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$ $\int_{2}^{3.5}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$	$\int_{1.2}^{2}\frac{\lg(x+2)}{x}dx$ $\int_{0.18}^{0.98}\frac{\sin x}{x+1}dx$
2	$\int_{1.2}^{2.7}\frac{dx}{\sqrt{x^2+3.2}}$ $\int_{0.5}^{1.3}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$	$\int_{1.6}^{2.4}(x+1)\sin x dx$ $\int_{0.2}^{0.18}\sqrt{x+1}\cos(x^2)\,dx$
3	$\int_{1.2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+1.3}}$ $\int_{2.2}^{2.6}\frac{dx}{\sqrt{x^2+0.6}}$	$\int_{0.2}^{1}\frac{tg(x^2)}{x^2+1}dx$ $\int_{1.4}^{3}x^2 lgx dx$
4	$\int_{0.2}^{1.2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ $\int_{1.4}^{2.2}\frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$	$\int_{0.6}^{1.4}\frac{\cos x}{x+1}dx$ $\int_{1.4}^{2.2}\frac{\lg(x^2+2)}{x+1}dx$
5	$\int_{0.8}^{1.4}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$ $\int_{0.8}^{1.8}\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$	$\int_{0.4}^{1.2}\sqrt{x}\cos(x^2)dx$ $\int_{0.4}^{1.2}\frac{\cos(x^2)}{x+1}dx$
6	$\int_{0.4}^{1.2}\frac{dx}{\sqrt{2+0.5x^2}}$ $\int_{1.6}^{2.2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2.5}}$	$\int_{0.8}^{1.2}\frac{\sin(2x)}{x^2}dx$ $\int_{0.8}^{1.6}(x^2+1)\sin(x-0.5)\,dx$
7	$\int_{1.4}^{2.1}\frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$ $\int_{0.6}^{1.6}\frac{dx}{\sqrt{x^2+0.8}}$	$\int_{0.8}^{1.6}\frac{\lg(x^2+1)}{x}dx$ $\int_{0.6}^{1.4}x^2 cosx dx$
8	$\int_{1.2}^{2.4}\frac{dx}{\sqrt{0.5+x^2}}$	$\int_{0.4}^{1.2}\frac{\cos x}{x+2}dx$

	$\int_{1.2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1.2}}$	$\int_{1.2}^{2}\frac{\lg(x^2+3)}{2x}dx$
9	$\int_{0.4}^{1.2}\frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$ $\int_{1.4}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+0.7}}$	$\int_{0.4}^{1.2}(2x+0.5)\sin x dx$ $\int_{2.5}^{3.3}\frac{\lg(x^2+0.8)}{x-1}dx$
10	$\int_{0.6}^{1.5}\frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$ $\int_{3.2}^{4}\frac{dx}{\sqrt{0.5x^2+1}}$	$\int_{0.4}^{0.8}\frac{tg(x^2+0.5)}{1+2x^2}dx$ $\int_{0.5}^{1.2}\frac{tg(x^2)}{x+1}dx$

ПРИЛОЖЕНИЕ В
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ
Численное интегрирование. Простейшие квадратурные формулы

Из курса математического анализа известно, что если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b существует и имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где F (x) — первообразная для функции / (x).

Для большинства элементарных функций первообразную F (x) не удается выразить через элементарные функции. Кроме того, при практических расчетах подынтегральная функция задается в виде таблиц. Все это приводит к необходимости замены интегрирования численными методами.

Задача численного интегрирования состоит в следующем: найти определенный интеграл на отрезке [a, b], если подынтегральная функция на отрезке [a, b] задана таблично.

Формулы приближенного интегрирования называются *квадратурными формулами*. Рассмотрим простейшие из них.

Метод прямоугольников. Наиболее простым методом приближенного вычисления интеграла является метод прямоугольников, основанный на непосредственном определении интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ есть интегральная сумма, соответствующая некоторому разбиению отрезка [a, b] и некоторому выбору точек ξ_0, ξ_1, …, ξ_{n-1} на отрезках разбиения.

Вычисление определенного интеграла $I = \int_a^b f(x)dx$ геометрически сводится к вычислению площади криволинейной трапеции, ограниченной функцией f(x), осью абсцисс и прямыми x = a и x = b (рис. 7.1). Вычислим приближенное значение интеграла следующим образом. Заменим криволинейную трапецию DEba прямоугольником ABba, проведя AB так, чтобы фигуры BAC и CEB получились примерно равной площади.

Тогда площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции y=f(x), и полученного прямоугольника ABba будут примерно равны.

Учитывая, что высота прямоугольника ABba есть значение функции в точке ξ, запишем следующее приближенное равенство:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\xi).$$

Для увеличения точности численного интегрирования можно отрезок [a, b] разбить на несколько частей и для каждой из них вычислить приближенное значение площади криволинейной трапеции, основанием которой является отрезок $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i (i = 0, 1, \ldots, n-1)$, а высотой — число f($\xi_i$), т. е. значение функции в точке $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, выбранное из условия минимума ошибки интегрирования.

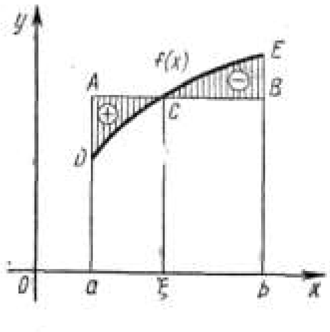


Рис. 7.1

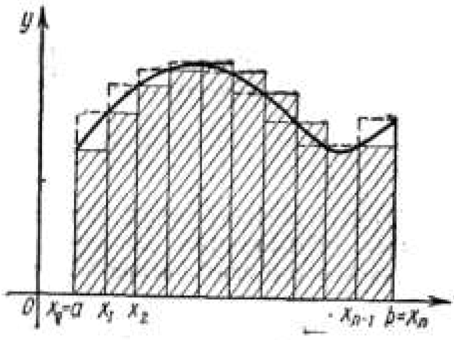


Рис. 7.2

Тогда за приближенное значение интеграла на отрезке [a, b] принимают интегральную сумму:

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Практически удобно делить отрезок [a, b] на равные части, а точки ξ_i (i = 0, 1, 2, ..., n-1) совмещать с левыми [f(ξ_i) = f(x_i)] или правыми [f(ξ_i) = f(x_{i+1})] концами отрезков разбиения.

Если точку ξ_i совместить с левым концом отрезка Δx_i, то приближенное значение интеграла геометрически равно площади заштрихованной ступенчатой фигуры (рис. 7.2), и может быть представлено *формулой левых прямоугольников*:

$$I_Л = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right) = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i, \qquad (1)$$

где h = (b — a)/n — шаг.

Если же в качестве точки ξ_i выбрать правый конец отрезка Δx_i, то приближенное значение интеграла графически равно площади ступенчатой фигуры, ограниченной сверху пунктирной линией, и вычисляется по *формуле правых прямоугольников*:

$$I_П = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_1 + y_2 + \ldots + y_n\right) = h\sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad (2)$$

Пример С помощью формул левых и правых прямоугольников вычислить $\int_1^9 \frac{dx}{x+2}$, полагая n = 4.

Решение. Зная пределы интегрирования a = 1 и b = 9, находим шар h = (b- a)/n=2; тогда точками разбиения служат $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$, $x_4 = 9$, а значения подынтегральной функции f(x) = $\frac{1}{x+2}$ в этих точках таковы:

$$y_0 = f(x_0) = \frac{1}{3};\ y_1 = f(x_1) = \frac{1}{5};\ y_2 = f(x_2) = \frac{1}{7};\ y_3 = f(x_3) = \frac{1}{9};\ y_4 = f(x_4) = \frac{1}{11}.$$

Далее найдем численное значение интеграла, пользуясь формулой левых прямоугольников:

$$I_Л = h(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right) \approx 1.6024.$$

Если же вычисление определенного интеграла производить по формуле правых прямоугольников, то

$$I_П = h(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) \approx 1.1053.$$

8 Вычисление интеграла по формулам трапеций, парабол (Симпсона), Ньютона-Котеса, Гаусса

1 Цель работы

1.1 Научиться вычислять интегралы по формулам трапеций и парабол (Симпсона), Гаусса, Ньютона-Котеса.

1.2 Научиться использовать пакет MathCad для численного интегрирования.

2 Приборы и оборудования

2.1 ПК IBM PC.

2.2 Математический пакет MathCad.

3 Порядок выполнения работы

3.1 Вычислить интегралы по формулам:

- трапеций;
- парабол (Симпсона);
- Ньютона-Котеса;
- Гаусса.

Для проверки найти точное решение определенного интеграла, с используя математический пакета MathCad. Варианты заданий см. в приложение Б.

3.2 Все вычисления вести с тремя знаками после запятой.

4 Содержание отчета

4.1 Цель работы.

4.2 Выполнение задания.

4.3 Вывод о проделанной работе.

5 Контрольные вопросы

5.1 В чем состоит задача численного интегрирования, численного дифференцирования?

5.2 Какие квадратурные формулы используются для численного интегрирования?

5.3 Какие интерполяционные формулы используются для численного дифференцирования?

5.4 Как в MathCad вычислить точное значение определенного интеграла? Аналитическое выражение неопределенного интеграла?

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ

1.2 Вычислить интегралы по формулам

$$\int_{0.5}^{1.3} \frac{1}{x^2+2}\,dx = 0.285$$

$a := 0.5$ $b := 1.3$ $n := 6$

$h := \frac{b-a}{n}$ $h = 0.133$

$x_0 := a$

$i := 0..n$ $x_{i+1} := x_i + h$

$f(x) := \frac{1}{x^2+2}$

$$x = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.633 \\ 0.767 \\ 0.9 \\ 1.033 \\ 1.167 \\ 1.3 \\ 1.433 \end{pmatrix}$$

$f(x_i) =$
0.444
0.416
0.386
0.356
0.326
0.298
0.271

$$I3 := \frac{h}{2}\cdot\left(f(x_0) + 2\cdot f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + 2f(x_5) + f(x_6)\right)$$

$I3 = 0.285$

$$I4 := \frac{h}{3}\cdot\left(f(x_0) + 4\cdot f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)\right)$$

$I4 = 0.285$

$H_0 := \frac{41}{840}$ $H_3 := \frac{34}{105}$ $H_4 := \frac{9}{280}$ $H_2 := \frac{9}{280}$ $H_5 := \frac{9}{35}$ $H_6 := \frac{41}{840}$ $H_1 := \frac{9}{35}$

$$I5 := (b-a)\cdot\sum_{i=0}^{n}\left(f(x_i)\cdot H_i\right)$$

$I5 = 0.285$

$x_6 := 0.93247$ $x_5 := 0.66121$ $x_3 := -0.23862$ $x_1 := -0.93247$ $x_2 := -0.66121$ $x_4 := 0.23862$

$C_6 := 0.17132$ $C_5 := 0.36076$ $C_1 := 0.17132$ $C_2 := 0.36076$ $C_4 := 0.46791$ $C_3 := 0.46791$

$z_i := \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cdot x_i$

$$z = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.527 \\ 0.636 \\ 0.805 \\ 0.995 \\ 1.164 \\ 1.273 \end{pmatrix}$$

$f(z_i) =$
0.312
0.439
0.416
0.378
0.334
0.298
0.276

$$I6 := \frac{b-a}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(f(z_i)\cdot C_i\right)$$

$I6 = 0.285$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 1

Номер варианта	Интеграл 1	Интеграл 2
1	$\int_{0.8}^{1.6}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$ $\int_{2}^{3.5}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$	$\int_{1.2}^{2}\frac{\lg(x+2)}{x}dx$ $\int_{0.18}^{0.98}\frac{\sin x}{x+1}dx$
2	$\int_{1.2}^{2.7}\frac{dx}{\sqrt{x^2+3.2}}$ $\int_{0.5}^{1.3}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$	$\int_{1.6}^{2.4}(x+1)\sin x dx$ $\int_{0.2}^{0.18}\sqrt{x+1}\cos(x^2)\,dx$
3	$\int_{1.2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+1.3}}$ $\int_{2.2}^{2.6}\frac{dx}{\sqrt{x^2+0.6}}$	$\int_{0.2}^{1}\frac{tg(x^2)}{x^2+1}dx$ $\int_{1.4}^{3}x^2 lg x dx$
4	$\int_{0.2}^{1.2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ $\int_{1.4}^{2.2}\frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$	$\int_{0.6}^{1.4}\frac{\cos x}{x+1}dx$ $\int_{1.4}^{2.2}\frac{\lg(x^2+2)}{x+1}dx$
5	$\int_{0.8}^{1.4}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$ $\int_{0.8}^{1.8}\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$	$\int_{0.4}^{1.2}\sqrt{x}\cos(x^2)dx$ $\int_{0.4}^{1.2}\frac{\cos(x^2)}{x+1}dx$
6	$\int_{0.4}^{1.2}\frac{dx}{\sqrt{2+0.5x^2}}$ $\int_{1.6}^{2.2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2.5}}$	$\int_{0.8}^{1.2}\frac{\sin(2x)}{x^2}dx$ $\int_{0.8}^{1.6}(x^2+1)\sin(x-0.5)\,dx$
7	$\int_{1.4}^{2.1}\frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$ $\int_{0.6}^{1.6}\frac{dx}{\sqrt{x^2+0.8}}$	$\int_{0.8}^{1.6}\frac{\lg(x^2+1)}{x}dx$ $\int_{0.6}^{1.4}x^2 cos x dx$
8	$\int_{1.2}^{2.4}\frac{dx}{\sqrt{0.5+x^2}}$ $\int_{1.2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1.2}}$	$\int_{0.4}^{1.2}\frac{\cos x}{x+2}dx$ $\int_{1.2}^{2}\frac{\lg(x^2+3)}{2x}dx$

9	$\int_{0.4}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$ $\int_{1.4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0.7}}$	$\int_{0.4}^{1.2} (2x+0.5)\sin x dx$ $\int_{2.5}^{3.3} \frac{\lg(x^2+0.8)}{x-1} dx$
10	$\int_{0.6}^{1.5} \frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$ $\int_{3.2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{0.5x^2+1}}$	$\int_{0.4}^{0.8} \frac{tg(x^2+0.5)}{1+2x^2} dx$ $\int_{0.5}^{1.2} \frac{tg(x^2)}{x+1} dx$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Метод трапеций.

Приближенное значение определенного интеграла можно вычислить и иным способом. Заменим на отрезке [a, b] дугу AB графика подынтегральной функции y = f(x) стягивающей ее хордой (рис. 7.3) и вычислим площадь трапеции ABba, Примем значение определенного интеграла численно равным площади этой трапеции:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}. \qquad (3)$$

Это и есть *формула трапеций* для приближенного вычисления интеграла.

Погрешность вычисления

$$R = \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

для формулы трапеций оценивается так:

$$R = -\frac{h}{12} y''(\xi), \qquad (4)$$

где точка $\xi \in (x_0, x_0 + h)$. В случае, если y"(ξ)> 0, вычисление по формуле (3) дает значение интеграла *с избытком*; если y" (ξ) < 0, то интеграл вычисляется *с недостатком*.

Точность вычислений возрастает, если отрезок [a, b] разделить на несколько частей и применить формулу трапеций к каждому отрезку Δx_i (рис. 7.4). Тогда

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\Delta x_i.$$

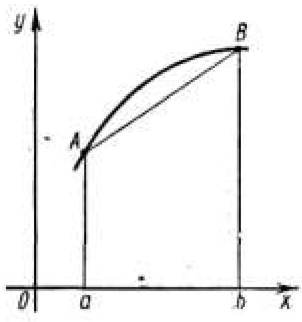


Рис. 7.3

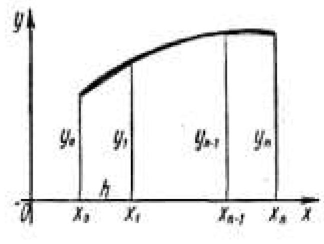


Рис. 7.4

Для простоты вычислений удобно делить отрезок [a, b] на равные части, в этом случае длина каждого из отрезков разбиения есть Δx_i =(b-a)/n. Численное значение интеграла на отрезке Δx_i равно

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}.$$

а на всем отрезке [a, b] соответственно

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{y_i+y_{i+1}}{2}.$$

Так как под знаком суммы величины y_i встречаются дважды (от i = 1 до i = n - 1), то последнее равенство запишется следующим образом:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right) = \frac{b-a}{n}\left[\sum_{i=1}^{n-1}y_i+\frac{y_0+y_n}{2}\right]. \qquad (5)$$

Эта формула называется *общей формулой трапеций*. Общую формулу трапеций можно переписать в виде

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{n-1}+y_n\right), \qquad (6)$$

где шаг

$$h = \frac{b-a}{n} \qquad (7)$$

Пример 1. Пользуясь общей формулой трапеций, вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ при n = 4.

Решение. Здесь $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; по формуле (7) находим h = 0,25

Следовательно, x_0= 0; x_1 = 0,25; x_2 = 0,5; x_3 = 0,75; x_4 = 1. Тогда по формуле (6) получим

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{0.25}{2}\left(1+\frac{2}{1+0.25^2}+\frac{2}{1+0.5^2}+\frac{2}{1+0.75^2}+\frac{1}{2}\right) \approx 0.764.$$

Метод парабол (метод Симпсона).

Точность приближенного интегрирования заметно возрастет, если подынтегральную функцию y = f (x) на отрезке [a, b] заменить квадратичной функцией (рис. 7.5), принимающей в узлах x_0 = a, x_1, x_2 = b значения y_0 = f (x_0), y_1 = f (x_1) и y_2 = f(x_2).

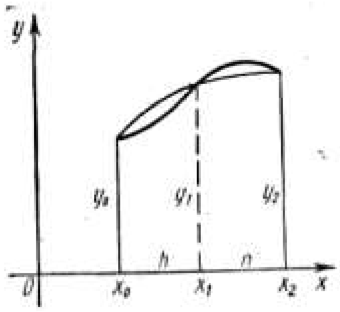


Рис. 7.5

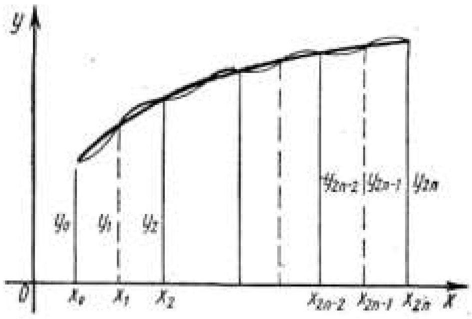


Рис. 7.6

В качестве интерполяционного многочлена воспользуемся многочленом Ньютона

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1).$$

Тогда

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = 2hy_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot \frac{4h^2}{2} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} \cdot \frac{8h^3}{3} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} \cdot h\frac{4h^2}{2} =$$

$$= 2hy_0 + 2h\Delta y_0 + \frac{h}{3}\Delta^2 y_0 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \quad (8)$$

Соотношение (8) называется *формулой Симпсона*. Формула Симпсона обладает повышенной точностью и является точной не только для многочленов второй степени, но и третьей.

Погрешность формулы Симпсона

$$R = \int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)dx - \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

оценивается следующим образом:

$$R = -\frac{h^5}{90} y^{IV}(\xi),$$

где точка $\xi \in [x_0, x_0 + 2h]$.

Для увеличения точности вычислений отрезок [a, b] разбивают на n пар участков [x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n}] (рис. 7.6) и заменяя подынтегральную функцию интерполяционным многочленом Ньютона второй степени, получают приближенное значение интеграла на каждом участке длины 2h:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

………..……..……..……..………

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Тогда численное значение определенного интеграла на отрезке [a, b] будет равно сумме интегралов, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + ... + y_{2n-1}) + 2(y_2 + ... + y_{2n-2})]. \quad (10)$$

Соотношение (10) называется *общей формулой Симпсона*. Ее можно записать также в виде

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + ... + y_{2n-1}) + 2(y_2 + ... + y_{2n-2})]. \quad (11)$$

где

$$h = \frac{b-a}{2n}. \quad (12)$$

Пример 2. Вычислить по формуле Симпсона $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ при h = 0,25.

Решение. По формуле (10) имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4].$$

Подставляя в подынтегральную функцию $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ значения x_0 = 0, x_1 = 0,25, x_2 = 0,5, x_3 = 0,75, x_4 = 1, получим

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{0.25}{3}\left[1 + \frac{4}{1+0.25^2} + \frac{2}{1+0.5^2} + \frac{4}{1+0.75^2} + \frac{1}{2}\right] \approx 0.702.$$

Обобщенная формула численного интегрирования Ньютона—Котеса

Пусть некоторая функция f (x) задана в узлах интерполяции $x_i = x_0 + ih$ (i=1, 2, …, n) на отрезке [a, b] таблицей своих значений:

x_0=a	x_1	x_2	…	x_n = b
y_0=f(x_0)	y_1=f(x_1)	y_2=f(x_2)	…	y_n=f(x_n)

Требуется найти значение интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx.$

По заданным значениям подынтегральной функции построим интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} y_i. \tag{1}$$

Для равноотстоящих узлов интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{q-i} y_i, \tag{2}$$

где q = (x – x_0)/h — шаг интерполяции. Далее заменим подынтегральную функцию f (x) интерполяционным многочленом Лагранжа, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \int\limits_{x_0}^{x_n} \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{q-i} y_i \right] dx. \tag{3}$$

Поменяем местами знак суммирования и интеграл и вынесем за знак интеграла постоянные коэффициенты:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int\limits_{x_0}^{x_n} \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{q-i} dx.$$

Так как $dq = \dfrac{dx}{h}$, то заменив пределы интегрирования, имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot h \int\limits_0^n q(q-1)\ldots(q-i+1)(q-i-1)\ldots(q-n)dq. \tag{4}$$

Для равноотстоящих узлов интерполяции на отрезке [a, b] величина шага определяется как h = (b - a)/n. Подставив это выражение для h в формулу (4) и вынося b - a за знак суммы, получим

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{1}{n} \int\limits_0^n q(q-1)\ldots(q-i+1)(q-i-1)\ldots(q-n)dq. \tag{5}$$

Положим

$$H_i = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{1}{n} \int\limits_0^n q(q-1)\ldots(q-i+1)(q-i-1)\ldots(q-n)dq. \tag{6}$$

где i = 0, 1, 2, ..., n; числа H_i называются *коэффициентами Ньютона - Котеса*. Эти коэффициенты не зависят от вида f(x), а являются функцией только n (количества узлов интерполяции). Поэтому коэффициенты Ньютона - Котеса можно вычислить заранее для различного числа узлов интерполяции и свести в справочную таблицу.

Таблица 7.1

n=1	$H_0=H_1=1/2$
n=2	$H_0=H_2=1/6$, $H_1=2/3$
n=3	$H_0=H_3=1/8$, $H_1=H_2=3/8$
n=4	$H_0=H_4=7/90$, $H_1=H_3=16/45$, $H_2=2/15$
n=5	$H_0=H_5=19/288$, $H_1=H_4=25/96$, $H_2=H_3=25/144$
n=6	$H_0=H_6=41/840$, $H_1=H_5=9/35$, $H_2=H_4=9/280$, $H_3=34/105$
n=7	$H_0=H_7=751/17280$, $H_1=H_6=3577/17280$, $H_2=H_5=1323/17280$, $H_3=H_4=2989/17280$

Окончательно формула (5) примет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} y_i H_i. \tag{7}$$

Пример. Вычислить по формуле Ньютона—Котеса $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x}dx$, выбрав n=4.

Решение. Формула Ньютона — Котеса для n = 4 имеет вид

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x}dx = \frac{\pi}{2}\sum_{i=0}^{4} H_i y_i. \tag{*}$$

Определим шаг h= (b-a)/4 ≈ 0,4. Далее, найдем значения подынтегральной функции $y=\frac{\cos x}{1+x}$ в точках x_0, x_1, x_2, x_3, x_4:

$$x_0=0;\ y_0=\frac{\cos 0}{1+0}=1,\ x_1=0.4;\ y_1=\frac{\cos 22.5^\circ}{1+0.4}=0.659,\ x_2=0.8;\ y_2=\frac{\cos 45^\circ}{1+0.8}=0.393,$$

$$x_3=1.2;\ y_3=\frac{\cos 67.5^\circ}{1+1.2}=0.174,\ x_4=1.6;\ y_4=\frac{\cos 90^\circ}{1+1.6}=0.$$

Пользуясь табл. 7.1, находим коэффициенты Ньютона — Котеса:

$H_0=H_4=7/90$, $H_1=H_3=16/45$, $H_2=2/15$.

Подставив найденные значения в формулу, (*) получим

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x}dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{7}{90}(1+0)+\frac{16}{45}(0.659+0.174)+\frac{2}{5}\cdot 0.393\right]=0.670.$$

Рассмотрим частные случаи формулы Ньютона – Котеса. Если в формуле (7) положить n= 1, то получим

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)(y_0 H_0 + y_1 H_1),$$

где

$$H_0 = -\int_0^1 (q-1)dq = \frac{1}{2};\ H_1 = \int_0^1 qdq = \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{2}(y_0 + y_1),$$

но поскольку b - a = h (ведь п = 1), окончательно имеем

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1). \qquad (8)$$

Тем самым в качестве частного случая формулы Ньютона - Котеса мы получили *формулу трапеций*.

Положим теперь в формуле (7) n = 2 и найдем коэффициенты Ньютона – Котеса:

$$H_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^2 (q-1)(q-2)dq = \frac{1}{6},$$

$$H_1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\int_0^2 q(q-2)dq = \frac{2}{3},$$

$$H_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^2 q(q-1)dq = \frac{1}{6}.$$

Так как b - a = 2h, то отсюда следует, что

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \qquad (9)$$

а

Таким образом, мы получили *формулу Симпсона* как частный случай формулы Ньютона - Котеса.

Если же в выражении (7) положить n = 3, то получаем следующее равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3). \qquad (10)$$

Эта формула называется *правилом трех восьмых*. Ее погрешность оценивается соотношением

$$R = -\frac{3h^5}{80}y^{IV}(\xi), \qquad (11)$$

где точка $\xi \in [a, b]$.

Квадратурная формула Гаусса

Для получения повышенной точности при численном интегрировании пользуются *формулой Гаусса*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \ldots + c_n f(x_n), \tag{1}$$

в которой не фиксируются не только узлы интерполяции $x_1, x_2, ..., x_n$, но и квадратурные коэффициенты $c_1, c_2, ..., c_n$. При этом 2n неизвестных величин $x_1, x_2, ..., x_n, c_1, c_2, ..., c_n$ определяются из условия, что формула является точной в случае любого многочлена степени 2n - 1.

Таким образом, для любого многочлена (2n - 1)-й степени

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2n-1} x^{2n-1} \tag{2}$$

должно выполняться точное равенство

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \ldots + c_n f(x_n), \tag{3}$$

Многочлен f(x), степень которого равна 2n - 1, можно представить в виде

$$f(x) = F(x)Q(x) + R(x), \tag{4}$$

где F (x) — искомый многочлен n-й степени, а Q (x) и R (x) — соответственно частное от деления f(x) на F(x) и остаток от этого деления; степени многочленов Q(x) и R(x) не превышают n-1. Выражение для F(x) можно записать таким образом:

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n); \tag{5}$$

здесь величины $x_1, x_2, ..., x_n$ — искомые абсциссы формулы Гаусса, а $A_1, A_2,...,A_n$ — постоянные.

Так как искомая функция F(x) в узлах $x_1, x_2, ..., x_n$ обращается в нуль, то

$$f(x_1) = R(x_1), f(x_2) = R(x_2), \ldots, f(x_n) = R(x_n). \tag{6}$$

Тогда равенство (3) примет вид

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} F(x)Q(x)dx + \int_{-1}^{1} R(x)dx = c_1 R(x_1) + c_2 R(x_2) + \ldots + c_n R(x_n). \tag{7}$$

Но для многочлена R(x) степени не выше n-1 также должно иметь место точное равенство

$$\int_{-1}^{1} R(x)dx = c_1 R(x_1) + c_2 R(x_2) + \ldots + c_n R(x_n). \tag{8}$$

Вычитая (8) из (7), получим

$$\int_{-1}^{1} F(x)Q(x)dx = 0. \tag{9}$$

Из последнего соотношения можно определить искомую функцию F(x). Так как равенство (9) справедливо для произвольного многочлена Q(x) степени n-1, т. е. для многочлена вида

$$Q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2} x + b_{n-1}, \tag{10}$$

то оно выполняется при любых коэффициентах $b_0, b_1, ..., b_{n-1}$; следовательно, имеет место следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} x^{n-1}F(x)dx = 0, \\ \int_{-1}^{1} x^{n-2}F(x)dx = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \int_{-1}^{1} xF(x)dx = 0, \\ \int_{-1}^{1} F(x)dx = 0, \end{cases} \tag{11}$$

Подставляя сюда выражение для F(x) из формулы (5) и интегрируя, получим для определения коэффициентов $A_1, A_2, ..., A_n$ систему n уравнений:

$$\begin{cases} \frac{A_1}{2n-1} + \frac{A_3}{2n-3} + \frac{A_5}{2n-5} + \ldots = 0, \\ \frac{1}{2n-1} + \frac{A_2}{2n-3} + \frac{A_4}{2n-5} + \ldots = 0, \\ \frac{A_1}{2n-3} + \frac{A_3}{2n-5} + \frac{A_5}{2n-7} + \ldots = 0, \\ \frac{1}{2n-3} + \frac{A_2}{2n-5} + \frac{A_4}{2n-7} + \ldots = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{12}$$

Из этих уравнений видно, что $A_1 = A_3 = A_5 = A_7 = \ldots = 0$ и, следовательно, искомый многочлен имеет вид

$$F(x) = x^n + A_2x^{n-2} + A_4x^{n-4} + A_6x^{n-6} + \ldots . \tag{13}$$

Отметим, что при четном n корни уравнения F(x)=0 попарно равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, а при нечетном n корнем служит также и x = 0.

Определив из системы (12) коэффициенты A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), составим уравнение F(x)=0 и найдем его корни $x_1, x_2, ..., x_n$, т. е. искомые абсциссы формулы Гаусса, а затем вычислим коэффициенты c_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) по формуле

$$c_i = \frac{\int_{-1}^{1}(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)dx}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}. \tag{14}$$

Пример. Построить квадратурную формулу Гаусса для случая n=2 на отрезке интегрирования [- 1, 1].

Решение. Общий вид квадратурной формулы Гаусса при n=2 и заданных пределах интегрирования

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = c_1f(x_1) + c_2f(x_2),$$

где подлежат определению квадратурные коэффициенты c_1 и c_2, а также абсциссы x_1 и x_2.

Для определения абсцисс составим многочлен $F(x)=x^2 + A_1x + A_2$, коэффициенты A_1 и A_2 которого найдем из системы вида (11):

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} xF(x)dx = 0, \\ \int_{-1}^{1} F(x)dx = 0 \end{cases}$$

непосредственной подстановкой многочлена F(x) в систему. Имеем

$$\begin{cases} \dfrac{A_1}{3} = 0, \\ \dfrac{1}{3} + A_2 = 0, \end{cases}$$

т. е. $A_1 = 0$, $A_2 = -1/3$. Тогда

$$F(x) = x^2 - \frac{1}{3} = 0,$$

откуда

$$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -0.57735, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} = -0.57735.$$

Коэффициенты c_1 и c_2 вычислим по формуле (14):

$$c_1 = \int_{-1}^{1} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} dx = 1, \quad c_2 = \int_{-1}^{1} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} dx = 1,$$

Следовательно,

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-0.57735) + f(0.57735).$$

Однако можно подобрать многочлен F(x), удовлетворяющий соотношениям (11), без предварительного определения коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Якоби предложил в качестве многочлена F(x) воспользоваться *многочленом Лежандра*

$$F(x) = \frac{1}{n!2^2} \cdot \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}, \tag{15}$$

для которого справедливы равенства (11), т. е.

$$\int_{-1}^{1} x^k \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} = 0. \tag{16}$$

Действительно, интегрируя по частям, находим

$$s_k = \int_{-1}^{1} x^k \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} dx = \left[x^k \frac{d^{n-1} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}} \right]_{-1}^{1} - k \int_{-1}^{1} x^{k-1} \frac{d^{n-1} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}} dx. \tag{17}$$

Первый член правой части равенства (17) обращается в нуль. Отсюда

$$s_k = -k \int_{-1}^{1} x^{k-1} \frac{d^{n-1} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}} dx. \tag{18}$$

Аналогично получим

$$\int_{-1}^{1} x^{k-1}\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}dx = -(k-1)\int_{-1}^{1} x^{k-2}\frac{d^{n-2}(x^2-1)^n}{dx^{n-2}}dx,$$

………………………………………………………………

$$\int_{-1}^{1} x^{k-(k-1)}\frac{d^{n-(k-1)}(x^2-1)^n}{dx^{n-(k-1)}}dx = -1\cdot\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-k}(x^2-1)^n}{dx^{n-k}}dx = 0,$$

Итак, при k < n имеем

$$s_k = (-1)^k 1\cdot 2\cdot 3..k\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-k}(x^2-1)^n}{dx^{n-k}}dx = 0.$$

Таким образом, многочлен Лежандра удовлетворяет системе уравнений (11).

Можно показать, что всякий другой многочлен, удовлетворяющий этим условиям, отличается от вышеприведенного лишь постоянным множителем.

Для вычисления коэффициентов c_k используют упрощенную функцию частного вида. Положим

$$f(x) = 2F_k(x)F_k'(x), \tag{19}$$

где

$$F_k(x) = \frac{F(x)}{x-x_k} = k(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n) \tag{20}$$

(здесь величина k — постоянная). Тогда

$$\int_{-1}^{1} 2F_k(x)F_k'(x)dx = \left[F_k(x)\right]^2\Big|_{-1}^{1} = \frac{\left[F(1)\right]^2}{(1-x_k)^2} - \frac{\left[F(-1)\right]^2}{(1+x_k)^2} = \frac{4x_k}{(1-x_k^2)^2}F^2(1) = \frac{4x_k}{(1-x_k^2)^2}, \tag{21}$$

так как $[F(-1)]^2 = [F(1)]^2 = 1$. Согласно формуле (3)

$$\int_{-1}^{1} 2F_k(x)F_k'(x)dx = 2c_k F(x_k)F'(x_k), \tag{22}$$

поскольку все остальные члены в формуле (3) обращаются в нуль.

Дифференцируя равенство

$$(x - x_k)\, F_k(x) = F(x)$$

дважды по x и полагая $x = x_k$, получим

$$F_k(x_k) = F'(x_k),\ \ 2F_k'(x_k) = F''(x_k). \tag{23}$$

Подставляя (23) в (22) и сравнивая с (21), находим

$$= \frac{4x_k}{(1-x_k^2)^2}\cdot\frac{1}{F'(x_k)F''(x_k)}. \tag{24}$$

Так как F(x) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(x^2-1)F''(x) + 2xF'(x) - n(n+1)F(x) = 0, \tag{25}$$

то полагая в нем $x = x_k$ и замечая, что $F(x_k) = 0$, имеем

$$\left(x_k^2-1\right)F''(x_k) + 2x_kF'(x_k) = 0,$$

откуда

$$F''(x_k) = \frac{2x_k F'(x_k)}{1 - x_k^2}. \quad (26)$$

Подставляя это выражение в соотношение для коэффициентов c_k, окончательно получаем

$$c_k = \frac{2}{(1 - x_k^2)[F'(x_k)]^2} \qquad (k = 1, 2, .., n). \quad (27)$$

Для вычисления интеграла общего вида $\int_a^b f(x)dx$ следует произвести замену переменной

$$z_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (28)$$

Тогда формула Гаусса примет вид

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left[c_1 f(z_1) + c_2 f(z_2) + .. c_n f(z_n)\right]. \quad (29)$$

Значения квадратурных коэффициентов Гаусса c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и абсцисс x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) приведены в табл. 7.3.

Таблица 7.3

n=1	x_1=0,5	c_1 = 2
n= 2	$-x_1=x_2$=0.577350	$c_1=c_2$=1
n=3	$-x_1=x_3$=0.774597 x_2=0	$c_1=c_3$=0.555555 c_2=0.888889
n=4	$-x_1=x_4$=0.861136 $-x_2=x_3$=0.339981	$c_1=c_4$=0.347855 $c_2=c_3$=0.652145
n=5	$-x_1=x_5$=0.906180 $-x_2=x_4$=0.538470 x_3=0	$c_1=c_5$=0.236927 $c_2=c_4$=0.478629 c_3=0.568889
n=6	$-x_1=x_6$=0.932470 $-x_2=x_5$=0.661210 $-x_3=x_4$=0.238620	$c_1=c_6$=0.171324 $c_2=c_5$=0.360761 $c_3=c_4$=0.467914
n=7	$-x_1=x_7$=0.949108 $-x_2=x_6$=0.741531 $-x_3=x_5$=0.405845 x_4=0	$c_1=c_7$=0.129485 $c_2=c_6$=0.279705 $c_3=c_5$=0.381830 c_4=0.417960
n=8	$-x_1=x_8$=0.960290 $-x_2=x_7$=0.796666 $-x_3=x_6$=0.525532 $-x_4=x_5$=0.183434	$c_1=c_8$=0.101228 $c_2=c_7$=0.222381 $c_3=c_6$=0.313707 $c_4=c_5$=0.362684

Пример. Вычислить интеграл $I = \int_0^1 \sqrt{x+1}dx$, применяя квадратурную формулу Гаусса с четырьмя ординатами.

Решение. Здесь a = 0, b = 1. Согласно формуле (29), имеем

$$\int_0^1 \sqrt{x+1}dx = \frac{b-a}{2}\left[c_1 f(z_1) + c_2 f(z_2) + c_3 f(z_3) + c_4 f(z_4)\right].$$

Найдем абсциссы z_1, z_2, z_3 и z_4, пользуясь формулой замены переменной (28) и табл. 7.3:

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 = 0.5 - 0.430568 = 0.069432;$$

$$z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 = 0.5 - 0.169991 = 0.330009;$$

$$z_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3 = 0.5 + 0.169991 = 0.669991;$$

$$z_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4 = 0.5 + 0.430568 = 0.930568.$$

Так как квадратурные коэффициенты попарно равны: $c_1=c_4=0{,}347855$; $c_2=c_3=0{,}652145$, то формула Гаусса для рассматриваемого случая принимает вид

$$\int_0^1 \sqrt{x+1}dx = \frac{1}{2}\left\{c_1\left[f(z_1) + f(z_4)\right] + c_2\left[f(z_2) + f(z_3)\right]\right\}.$$

Тогда окончательно получаем

$$\int_0^1 \sqrt{x+1}dx = \frac{1}{2}\left\{0.347855\left[\sqrt{1.069432} + \sqrt{1.930568}\right] + 0.652145\left[\sqrt{1.330009} + \sqrt{1.669991}\right]\right\} = 1.218951.$$

9 Интерполяционные формулы Ньютона, Гаусса, Стирлинга, Бесселя

1 Цель работы

1.1 Научиться вычислять значения первой и второй производной.
1.2 Научиться использовать пакет MathCad для численного дифференцирования.

2 Приборы и оборудования

2.1 ПК IBM PC.
2.2 Математический пакет MathCad.

3 Порядок выполнения работы

3.1 Используя интерполяционные формулы Ньютона, Гаусса, Стирлинга, Бесселя найти значение первой и второй производных при данных значениях аргумента для функции, заданной таблично. Варианты заданий см. в приложение Б.
3.2 Все вычисления вести с тремя знаками после запятой.

4 Содержание отчета

4.1 Цель работы.
4.2 Выполнение задания.
4.3 Вывод о проделанной работе.

5 Контрольные вопросы

5.1 В чем состоит задача численного интегрирования, численного дифференцирования?
5.2 Какие квадратурные формулы используются для численного интегрирования?
5.3 Какие интерполяционные формулы используются для численного дифференцирования?
5.4 Как в MathCad вычислить точное значение определенного интеграла? Аналитическое выражение неопределенного интеграла?

ПРИЛОЖЕНИЕ А
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ

1.1 Используя интерполяционные формулы Ньютона, Гаусса, Стирлинга, Бесселя найти значение первой и второй производных при данных значениях аргумента для функции, заданной таблично.

$$x := \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1.2 \\ 1.6 \\ 2.0 \\ 2.4 \\ 2.8 \\ 3.2 \\ 3.6 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 2.857 \\ 3.946 \\ 4.938 \\ 5.801 \\ 6.503 \\ 7.010 \\ 7.288 \\ 7.301 \end{pmatrix}$$

$n := 7$

Конечные разности

$i := 0..n-1$

$\Delta y_i := y_{i+1} - y_i \qquad i := 0..n-2$

$\Delta 2y_i := \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \qquad i := 0..n-3$

$\Delta 3y_i := \Delta 2y_{i+1} - \Delta 2y_i$

$$\Delta y = \begin{pmatrix} 1.089 \\ 0.992 \\ 0.863 \\ 0.702 \\ 0.507 \\ 0.278 \\ 0.013 \end{pmatrix} \qquad \Delta 2y = \begin{pmatrix} -0.097 \\ -0.129 \\ -0.161 \\ -0.195 \\ -0.229 \\ -0.265 \end{pmatrix} \qquad \Delta 3y = \begin{pmatrix} -0.032 \\ -0.032 \\ -0.034 \\ -0.034 \\ -0.036 \end{pmatrix}$$

$X1 := 1.: \quad h := x_1 - x_0 \quad h = 0.4 \quad q := \dfrac{X1 - x_1}{h} \quad q = 0$

Формула Ньютона

$$P1(X) := \frac{1}{h}\left(\Delta y_1 - \frac{1}{2}\cdot\Delta 2y_1 + \frac{1}{3}\Delta 3y_1\right)$$

$P1(X1) = 2.615$

$$P2(X) := \frac{1}{h^2}\left(\Delta 2y_1 - \Delta 3y_1\right)$$

$P2(X1) = -0.606$

$X2 := 2.2: \quad q := \dfrac{X2 - x_3}{h} \quad q = 0.575$

Формула Áåññåëÿ

$$P1(X) := \frac{1}{h}\left(\Delta y_3 + \frac{2\cdot q - 1}{2}\cdot\frac{\Delta 2y_2 + \Delta 2y_3}{2} + \frac{3\cdot q^2 - 3\cdot q + \frac{1}{2}}{6}\Delta 3y_2\right)$$

$P1(X2) = 1.725$

$$P2(X) := \frac{1}{h^2}\left(\frac{\Delta 2y_2 + \Delta 2y_3}{2} + \frac{2 \cdot q - 1}{2}\Delta 3y_2\right)$$

$$P2(X) := \frac{1}{h^2}\left(\frac{\Delta 2y_2 + \Delta 2y_3}{2} + \frac{2 \cdot q - 1}{2}\Delta 3y_2\right)$$

$P2(X2) = -1.128$

$X3 := 2.7\quad q := \frac{X3 - x_5}{h}\quad q = -0.1$

Формула Ñòèðëèíãà

$$P1(X) := \frac{1}{h}\cdot\left(\frac{\Delta y_4 + \Delta y_5}{2} + q\cdot\Delta 2y_4 + \frac{3\cdot q^2 - 1}{6}\cdot\frac{\Delta 3y_3 + \Delta 3y_4}{2}\right)$$

$P1(X3) = 1.053$

$$P2(X) := \frac{1}{h^2}\left(\Delta 2y_4 + q\cdot\frac{\Delta 3y_3 + \Delta 3y_4}{2}\right)$$

$P2(X3) = -1.409$

$X4 := 3.\quad q := \frac{X4 - x_5}{h}\quad q = 0.75$

Формула Ãàóññà

$$P1(X) := \frac{1}{h}\left(\Delta y_5 + \frac{2\cdot q - 1}{2}\cdot\Delta 2y_4 + \frac{3\cdot q^2 - 1}{6}\Delta 3y_4\right)$$

$P1(X1) = 0.542$

$$P2(X) := \frac{1}{h^2}\left(\Delta 2y_4 + q\,\Delta 3y_4\right)$$

$P2(X1) = -1.6$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 1

x	y(x)
2,4	3,526
2,6	3,782
2,8	3,945
3,0	4,043
3,2	4,104
3,4	4,155
3,6	4,222
3,8	4,331
4,0	4,507
4,2	4,775
4,4	5,159
4,6	5,683

Варианты	X1	X2	X3	X4
1	2,45	3,15	4,44	4
3	2,47	3,18	4,38	3,96
5	2,55	3,21	4,32	3,92
7	2,57	3,24	4,26	3,88
9	2,61	3,27	4,2	3,84
11	2,63	3,3	4,14	3,8
13	2,41	3,33	4,08	3,76
15	2,51	3,36	4,02	3,72

Таблица 2

x	y(x)
1,5	10,517
2,0	10,193
2,5	9,807
3,0	9,387
3,5	8,977
4,0	8,637
4,5	8,442
5,0	8,482
5,5	8,862
6,0	9,701
6,5	11,132
7,0	13,302

Варианты	X1	X2	X3	X4
2	1,76	3,38	6,18	5,76
4	1,8	3,49	6,06	5,67
6	1,9	3,38	5,94	5,58
8	2,01	3,27	5,82	5,49
10	2,1	3,16	5,7	5,4
12	2,31	3,05	5,58	5,31
14	1,45	2,94	5,46	5,22
2	1,76	3,38	6,18	5,76

ПРИЛОЖЕНИЕ В

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Численное дифференцирование. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на интерполяционных формулах Ньютона

При решении задач часто приходится вычислять производную, однако во многих практических задачах функции задаются таблично и методы дифференциального исчисления к исследованию таких функций применить нельзя. В этом случае прибегают к численному дифференцированию.

Задача численного дифференцирования ставится следующим образом. Пусть функция y = f(x) на отрезке [a, b] задана таблично своими n + 1 значениями. Требуется найти аналитическое выражение производной.

В качестве аппроксимирующей функции выберем интерполяционный многочлен. Если узлы интерполяции в исходной задаче равноотстоящие, т. е. $x_{i+1} - x_i = h$ (где i = 0, 1, ..., n), то в этом случае для замены функции f(x) можно воспользоваться интерполяционными формулами Ньютона.

Пусть

$$f(x) \approx y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \ldots, \quad (1)$$

где правая часть есть первая интерполяционная формула Ньютона, выраженная через число шагов; здесь $q = (x-x_0)/h$ и h $x_{i+1}-x_i$ (i = 0, 1, 2, ...). Перепишем формулу (1) в следующем виде:

$$f(x) \approx y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2-q}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3-3q^2+2q}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{q^4-6q^3+11q^2-6q}{24}\Delta^4 y_0 \ldots \, . \quad (1')$$

Заметим, что

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dq}\cdot\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}\cdot\frac{df(x)}{dx}. \quad (2)$$

Продифференцировав равенство (1′) и воспользовавшись зависимостью (2), получим

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right]. \quad (3)$$

Продифференцировав теперь функцию y = *f′(x)*, имеем

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right], \quad (4)$$

так как

$$f''(x) = \frac{d(f'(x))}{dx} = \frac{d(f'(x))}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}.$$

Таким же образом можно определить и следующие производные функции f(x).

Формулы приближенного дифференцирования для определения производных в узлах интерполяции значительно упрощаются. Полагая q = 0, получим

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} \ldots\right) \quad (5)$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \ldots\right). \quad (6)$$

Погрешность в определении производной приближенно оценивается как

$$R'_k(x_0) \approx h^{k+1}\frac{q(q-1)\ldots(q-k)}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi), \quad (7)$$

где точка $\xi \in [a, b]$, но отлична от узлов интерполяции.

Чтобы получить значение производной в точке, лежащей в конце таблицы, следует воспользоваться второй интерполяционной формулой Ньютона:

$$f(x) \approx y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{4!}\Delta^4 y_{n-4} + \ldots, \quad (8)$$

где $q = (x - x_n)/h$. Тогда приближенное значение для производной есть

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_{n-1} + \frac{2q+1}{2}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{3q^2+6q+2}{6}\Delta^3 y_{n-3} + \frac{2q^3+9q^2+11q+3}{12}\Delta^4 y_{n-4} + \ldots\right]. \quad (9)$$

Пример. Функция y = f(x) задана таблично:

x_i	1	2	3	4
y_i	4	9	26	61

Методом численного дифференцирования найти первые две производные этой функции в точке x =1.

Решение. Составим таблицу конечных разностей:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1	4	5	12	6
2	9	17	18	
3	26	35		
4	61			

Шаг этой таблицы h = 1. Согласно формуле (5)

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0\right); \quad f'(1) = 1.$$

Вычислим вторую производную в узле интерполяции x_0 = 1. По формуле (6) находим

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0\right); \quad f''(1) = 6.$$

Формула приближенного дифференцирования, основанная на интерполяционной формуле Лагранжа

Пусть f(x) — функция, заданная на отрезке [a, b] таблично своими значениями $y_i = f(x_i)$ (где i = 0, 1, ..., n) в равноотстоящих узлах интерполяции, т. е. $x_{i+1} - x_i = h$ (i = 0, 1, ..., n - 1). Построив для данной системы узлов интерполяционный многочлен Лагранжа, получим

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{q-i} y_i, \qquad (1)$$

где $q = (x - x_0)/h$ — шаг интерполяции

Так как $\frac{dx}{dq} = h$, то из соотношения (1) находим

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{d}{dq}\left[\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{q-i}\right]. \qquad (2)$$

Погрешность, допускаемая при нахождении производной, есть

$$R_n'(x) = (-1)^{n-i} h^n \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi), \qquad (3)$$

где ξ — точка отрезка [a, b], отличная от узлов интерполяции.

Произведем расчет для n = 2 [функция f(x) задана тремя табличными значениями]. Имеем

$$L_2(x) = \frac{1}{2} y_0 (q-1)(q-2) - y_1 q(q-2) + \frac{1}{2} y_2 q(q-1).$$

Отсюда, учитывая, что $\frac{dx}{dq} = h$, находим

$$y'(x) \approx L_2'(x) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2} y_0 (2q-3) - y_1 (2q-2) + \frac{1}{2} y_2 (2q-1)\right].$$

В частности, для производных в узлах интерполяции $y'(x_i)=y_i$ получим следующие выражения:

$$y_0' = \frac{1}{2h}\left(-3y_0 + 4y_1 - y_2\right), \text{ причем } r_0 = \frac{1}{3} h^2 y'''(\xi_0);$$

$$y_1' = \frac{1}{2h}\left(-y_0 + y_2\right), \text{ причем } r_1 = -\frac{1}{6} h^2 y'''(\xi_1);$$

$$y_2' = \frac{1}{2h}\left(y_0 - 4y_1 + 3y_2\right), \text{ причем } r_2 = \frac{1}{3} h^2 y'''(\xi_2).$$

В случае n = 3 [функция f(x) задана четырьмя табличными значениями] аналогично получаем

$$y_0' = \frac{1}{6h}\left(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3\right) - \frac{h^3}{4} y^{IV}(\xi);$$

$$y_1' = \frac{1}{6h}\left(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3\right) + \frac{h^3}{12} y^{IV}(\xi);$$

$$y_2' = \frac{1}{6h}\left(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3\right) - \frac{h^3}{4} y^{IV}(\xi);$$

$$y_3' = \frac{1}{6h}\left(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3\right) + \frac{h^3}{4} y^{IV}(\xi);$$

Следует отметить, что формулы численного дифференцирования являются менее точными по сравнению с интерполяционными, однако они удобны для проведения практических расчетов.

I. Формулы численного дифференцирования.

А) Основанные на первой интерполяционной формуле Ньютона:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right)$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right)$$

где $q = (x - x_0)/h, \;\; h = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots)$

Б) Основанные на первой формуле Гаусса:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{3q^2-1}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{2q^3-3q^2-q+1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \ldots\right)$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1} + q\Delta^3 y_{-1} + \frac{6q^2-6q+1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \ldots\right)$$

В) Основанные на второй формуле Гаусса:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_{-1} + \frac{2q+1}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{3q^2-1}{6}\Delta^3 y_{-2} + \frac{2q^3+3q^2-q-1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \ldots\right)$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1} + q\Delta^3 y_{-2} + \frac{6q^2-6q-1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \ldots\right)$$

Г) Основанные на формуле Стирлинга:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} + q\Delta^2 y_{-1} + \frac{3q^2-1}{6}\frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2} + \frac{2q^3-q}{12}\Delta^4 y_{-2} + \ldots\right)$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1} + q\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{6q^2-1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \ldots\right)$$

Д) Основанные на формуле Бесселя:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{3q^2-3q+\frac{1}{2}}{6}\Delta^3 y_{-1} + \frac{2q^3-3q^2-q+1}{12}\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \ldots\right)$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{2q-1}{2}\Delta^3 y_{-1} + \frac{6q^2-6q-1}{12}\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \ldots\right)$$

10 Численное решение дифференциальных уравнений метод Эйлера

1 Цель работы

1.1 Научиться решать обыкновенные дифференциальные уравнения методом Эйлера;

1.2 Научиться использовать пакет MathCad для решения ОДУ.

2 Приборы и оборудования

2.1 ПК IBM PC.

2.2 Математический пакет MathCad.

3 Порядок выполнения работы

3.1 Используя математический пакет MathCad решить дифференциальное уравнение 1 $y' = f(x,y)$, с начальными условиями $y(x_0)=y_0$ на отрезке [a,b] с шагом h=0,1:

- методом Эйлера;

3.2 Используя математический пакет MathCad решить дифференциальное уравнение 2 $y' = f(x,y)$ с начальными условиями y(0)=0 на отрезке [0,1] с шагом h=0,1:

- методом Эйлера;

Вычисления вести с шестью знаками после запятой. Варианты заданий приведены в приложениях Б, В.

4 Содержание отчета

4.1 Цель работы.

4.2 Выполнение задания.

4.3 Вывод о проделанной работе.

5 Контрольные вопросы

5.1 Какое уравнение называется дифференциальным?

5.2 Что является решением дифференциального уравнения? Что это означает с геометрической точки зрения?

5.3 На какие основные группы подразделяются приближенные методы решения ОДУ?

5.4 В какой форме получается решение ОДУ численными методами?

5.5 Какие встроенные функции MathCad необходимы для решения ОДУ?

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Решение дифференциального уравнения методом Эйлера

$f(x,y) := \cos(y) + 3 \cdot x$

$i := 0..4$

$x_0 := 0$

$y_0 := 1.3$

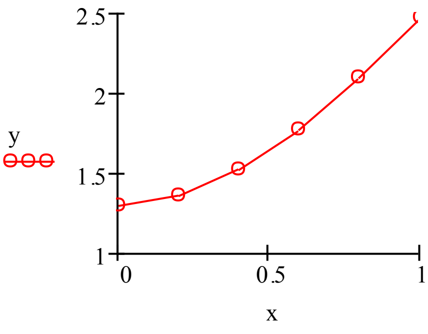
$h := 0.2$

$x_{i+1} := x_i + h$

$y_{i+1} := y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 1.3 \\ 1.353 \\ 1.517 \\ 1.767 \\ 2.088 \\ 2.469 \end{pmatrix}$$

$i := 0..5$



ПРИЛОЖЕНИЕ Б
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 1

Номер варианта	Уравнения 1	Уравнения 2
1	$y' = 1 + \cos\frac{y}{\sqrt{5}}$ $y_0(1,8)=2,6$ [1,8;2,8]	$y' = 1+0,2y\sin(x)-y^2$
2	$y' = 1 + \cos\frac{y}{3}$ $y_0(1,6)=4,6$ [1,6;2,6]	$y' = \cos(x+y)+0,5(x-y)$
3	$y' = 1 + \cos\frac{y}{\sqrt{10}}$ $y_0(0,6)=0,8$ [0,6;1,6]	$y' = \frac{\cos x}{x+1} - 0,5y^2$
4	$y' = 1 + \cos\frac{y}{\sqrt{7}}$ $y_0(0,5)=0,6$ [0,5;1,5]	$y' = (1 - y^2)\cos(x)+0,6y$
5	$y' = 1 + \cos\frac{y}{\pi}$ $y_0(1,7)=5,3$ [1,7;2,7]	$y' = 1+0,4y\sin(x) - 1,5y^2$
6	$y' = 1 + \cos\frac{y}{2,25}$ $y_0(1,4)=2,2$ [1,4;2,4]	$y' = \frac{\cos y}{x+2} + 0,3y^2$
7	$y' = 1 + \cos\frac{y}{e}$ $y_0(1,4)=2,5$ [1,4;2,4]	$y' = \cos(1,5x+y)+(x - y)$
8	$y' = 1 + \cos\frac{y}{\sqrt{2}}$ $y_0(0,8)=1,4$ [0,8;1,8]	$y' = 1 - \sin(x+y) + \frac{0,5y}{x+2}$
9	$y' = 1 + \cos\frac{y}{\sqrt{3}}$ $y_0(1,2)=2,1$ [1,2;2,2]	$y' = \frac{\cos y}{1,5+x} + 0,1y^2$
10	$y' = 1 + \cos\frac{y}{\sqrt{11}}$ $y_0(2,1)=2,5$ [2,1;3,1]	$y' = 0,6\sin(x) - 1,25y^2+1$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 2

Номер варианта	Уравнения 1	Уравнения 2
1	$y' = 1 + \sin\frac{y}{\sqrt{5}}$ $y_0(1,8)=2,6$ [1,8;2,8]	$y' = \cos(2x+y)+1,5(x - y)$
2	$y' = 1 + \sin\frac{y}{3}$ $y_0(1,6)=4,6$ [1,6;2,6]	$y' = 1 - \frac{0,1y}{x+2} - \sin(2x+y)$
3	$y' = 1 + \sin\frac{y}{\sqrt{10}}$ $y_0(0,6)=0,8$ [0,6;1,6]	$y' = \frac{\cos y}{1,25+x} - 0,1y^2$
4	$y' = 1 + \sin\frac{y}{\sqrt{7}}$ $y_0(0,5)=0,6$ [0,5;1,5]	$y' = \cos(1,5x+y)+1,5(x - y)$
5	$y' = 1 + \sin\frac{y}{\pi}$ $y_0(1,7)=5,3$ [1,7;2,7]	$y' = 1+0,8\sin(x) - 2y^2$,
6	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2,8}}$ $y_0(1,4) = 2,2$ [1,4; 2,4]	$y' = 1 - \sin(2x+y) + \frac{0,3y}{x+2}$
7	$y' = x + \sin\frac{y}{e}$ $y_0(1,4) = 2,5$ [1,4; 2,4]	$y' = \frac{\cos y}{1,75+x} - 0,5y^2$
8	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2}}$ $y_0(0,8) = 1,3$ [0,8; 1,8]	$y' = 1 + (1-x)\sin y - (2+x)y$
9	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{3}}$ $y_0(1,1) = 1,5$ [1,1; 2,1]	$y' = (0,8 - y^2)\cos x + 0,3y$
10	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{11}}$ $y_0(0,6) = 1,2$ [0,6; 1,6]	$y' = 1 + 2,2\sin x + 1,5y^2$

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Понятие о дифференциальном уравнении

Уравнение, в котором неизвестная функция входит под знаком производной или дифференциала, называется *дифференциальным уравнением*.

Например,

$$\frac{dy}{dx} = 2(y-3); \quad \frac{d^2y}{dt^2 = t+1}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \quad y' = x^2; \quad xdy = y^3dx.$$

Если неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, зависит только от одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*.

Таковы, например, дифференциальные уравнения

$$x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 2; \quad 2sdt = tds.$$

Если же неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, является функцией двух или большего числа независимых переменных, то дифференциальное уравнение называется *уравнением в частных производных*.

Например, дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

есть уравнение в частных производных.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной (или дифференциала), входящей в уравнение.

Так, например, уравнения

$$\frac{d^2s}{dt^2} = t-1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 1$$

являются уравнениями второго порядка, а уравнения

$$\frac{ds}{dt} \cdot \cos t + \sin t = 1; \quad (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$$

— первого порядка.

В настоящей главе рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка в самом общем случае содержит независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные или дифференциалы до n-го порядка включительно и имеет вид

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (1)$$

В этом уравнении x — независимая переменная, y — неизвестная функция, $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ — производные этой функции.

Если левая часть дифференциального уравнения (1) является многочленом по отношению к производной максимального порядка от неизвестной функции, то степень этого многочлена называется *степенью* дифференциального уравнения.

Например, уравнение

$$(y'')^4+(y')^2-y^6+x^7=0$$

является уравнением второго порядка четвертой степени, а уравнение

$$(y')^2+x^4y^5-y^3+x^{10}=0$$

— уравнением первого порядка второй степени.

Дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной, может быть записано в виде

$$y^{(n)}=f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (2)$$

Решением (или *интегралом*) уравнения (2) называется всякая дифференцируемая функция $y=\varphi(x)$, удовлетворяющая этому уравнению, т. е. такая, после подстановки которой в уравнение (2) оно обращается в тождество.

График решения обыкновенного дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения.

Решение дифференциального уравнения, содержащее столько независимых произвольных постоянных (параметров), каков его порядок, называется *общим решением* (или *общим интегралом*) этого уравнения.

Геометрически общее решение дифференциального уравнения представляет собой семейство интегральных кривых этого уравнения.

Частным решением дифференциального уравнения называется всякое решение, которое может быть получено из общего при определенных числовых значениях произвольных постоянных, входящих в общее решение.

Произвольные постоянные, входящие в общее решение, определяются из так называемых начальных условий.

Задача с начальными условиями ставится так: найти решение $y=\varphi(x)$ уравнения $y^{(n)}=f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$, удовлетворяющее дополнительным условиям, состоящим в том, что решение $y=\varphi(x)$ должно принимать вместе со своими производными до (n-1)-го порядка заданные числовые значения $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ при заданном числовом значении $x=x_0$ независимой переменной x:

$$y=y_0,\ y'=y_0',\ y''=y_0'', \ldots, y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)} \ \textit{при}\ x=x_0. \qquad (3)$$

Условия (3) называются *начальными условиями*; числа $x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — *начальными данными* решения, а задача отыскания решения $y=\varphi(x)$ дифференциального уравнения (2), удовлетворяющего начальным условиям (3), — *задачей с начальными условиями*, или *задачей Коши*.

В случае уравнения первого порядка, т. е. при n = 1, получаем задачу Коши для уравнения $y'=f(x, y)$ с начальным условием $x=x_0$, $y=y_0$.

Геометрически задача Коши (для уравнения первого порядка) стоит в том, что из всего множества интегральных кривых, представляющих собой общее решение, нужно найти ту интегральную кривую, которая проходит через точку M_0 с координатами $x = x_0$, $y = y_0$.

Пример. Для дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = 2x$ с начальным условием $y_0= 2$ при $x_0 = 1$ общее решение имеет вид $y = x^2 + C$. Оно представляет собой семейство парабол. Если теперь в общее решение подставить начальные данные, получим 2 = 1 + C, т. е. C = 1. Следовательно, частное решение, удовлетворяющее указанному начальному условию, есть $y = x^2 + 1$. Геометрически это означает, что из всего множества парабол, представляющих общее решение дифференциального уравнения, выбираем одну, проходящую через точку M_0 (1; 2) рис. 9.1).

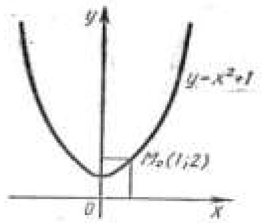


Рис. 9.1

Задача Коши имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, если функция f(x, y) непрерывна в некоторой области $R_{[a,b]} = \{|x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$ и удовлетворяет в этой области *условию Липшица*

$$|f(x, \bar{y})| - f(x, y) \le N|\bar{y} - y|,$$

где N — постоянная Липшица, зависящая от a и b (a и b — границы области).

Методы точного интегрирования дифференциальных уравнений пригодны лишь для сравнительно небольшой части уравнений, встречающихся на практике.

Поэтому большое значение приобретают методы приближенного решения дифференциальных уравнений, которые в зависимости от формы представления решения можно разделить на две группы:

1) *аналитические методы*, дающие приближенное решение дифференциального уравнения в виде аналитического выражения;

2) *численные методы*, дающие приближенное решение в виде таблицы.

Численное интегрирование дифференциальных уравнений. Метод Эйлера

Решить дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ численным методом — это значит для заданной последовательности аргументов $x_0, x_1 \ldots, x_n$ и числа y_0, не определяя функцию $y = F(x)$, найти такие значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$, что $y_i = F(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $F(x_0) = y_0$.

Таким образом, численные методы позволяют вместо нахождения функции $y = F(x)$ получить таблицу значений этой функции для заданной последовательности аргументов. Величина $h = x_k - x_{k-1}$ называется *шагом интегрирования*.

Рассмотрим некоторые из численных методов.

Метод Эйлера. Этот метод является сравнительно грубым и применяется в основном для ориентировочных расчетов. Однако идеи, положенные в основу метода Эйлера, являются исходными для ряда других методов.

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x = x_0,\ y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Требуется найти решение уравнения (1) на отрезке [a, b].

Разобьем отрезок [a, b] на n равных частей и получим последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$, а $h = (b-a)/n$ — шаг интегрирования.

Выберем k-й участок $[x_k, x_{k+1}]$ и проинтегрируем уравнение (1):

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'dx\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = y(x_{k+1}) - y(x_k) = y_{k+1} - y_k,$$

т.е.

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)dx. \tag{3}$$

Если в последнем интеграле подынтегральную функцию на участке $[x_k, x_{k+1}]$ принять постоянной и равной начальному значению в точке $x = x_k$, то получим

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k, y_k)dx = f(x_k, y_k)dx \cdot x\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) = y_k' h.$$

Тогда формула (3) примет вид

$$y_{k+1} = y_k + y_k' h. \tag{3'}$$

Обозначив $y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$, т. е. $y_k' h = \Delta y_k$, получим

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k. \tag{4}$$

Продолжая этот процесс и каждый раз принимая подынтегральную функцию на соответствующем участке постоянной и равной ее значению в начале участка, получим таблицу решений дифференциального уравнения на заданном отрезке [a, b]. Равенство (4) означает, что на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ интегральная кривая $y = y(x)$ приближенно заменяется прямолинейным отрезком, выходящим из точки M_k $\{x_k; y_k)$ с угловым коэффициентом $f(x_k, y_k)$. В качестве приближения искомой интегральной кривой получаем ломаную линию с вершинами в точках $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$, …, $M_n(x_n; y_n)$. Первое звено касается истинной интегральной кривой в точке $M_0(x_0; y_0)$ (рис. 9.2).

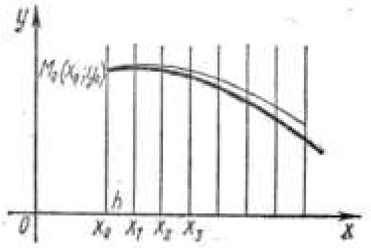


Рис. 9.2

Если функция f(x, y) в некотором прямоугольнике

$$R\{|x-x_0|\le a,\ |y-y_0|\le b\}$$

удовлетворяет условию

$$|f(x_1,y_1)-f(x_1,y_2)|\le N|y_1-y_2|\quad (N=const) \tag{5}$$

и, кроме того,

$$\left|\frac{df}{dx}\right|=\left|\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial f}{\partial y}\right|\le M\quad (M=const), \tag{6}$$

то имеет место следующая оценка погрешности:

$$|y(x_n)-y_n|\le\frac{hM}{2N}\left[(1+hN)^n-1\right], \tag{7}$$

где y (x_n) — значение точного решения уравнения (1) при x = x_n, а y_n — приближенное значение, полученное на n-м шаге.

Формула (7) имеет в основном теоретическое применение. На практике, как правило, применяют «двойной просчет». Сначала расчет ведется с шагом h, затем шаг дробят и повторный расчет ведется с шагом h/2. Погрешность более точного значения y_n^* оценивается формулой

$$|y_n^*-y(x_n)|\approx|y_n^*-y_n|. \tag{8}$$

Пример 1. Проинтегрировать методом Эйлера дифференциальное уравнение $y'=y-x$ с начальным условием x_0 = 0, y_0 = 1,5 на отрезке [0; 1,5], приняв h = 0,25. Вычисления вести с четырьмя знаками после запятой.

Решение. Для удобства вычислений составим следующую таблицу (см. табл. 9.2).

I шаг. По начальным данным заполняем первую строку в столбцах (2) и (3).

II шаг. Из уравнения $y'=y-x$, вычисляем y_i' (i = 0,1, …, 5) в столбце (4).

III шаг. Содержимое столбца (4) умножаем на h (вычисляем $\Delta y_i=hy_i'$; i = 0, 1, ..., 5) и записываем в столбец (5) этой же строки.

IV шаг. К содержимому столбца (3) прибавляем содержимое столбца (5) этой же строки (вычисляем $y_{i+1}=y_i+\Delta y_i$; i = 0, 1, ..., 5) и результат записываем в столбец (3) следующей строки. Определяем $x_{i+1}=x_i+h$ и затем шаги II, III, IV повторяем до тех пор, пока не будет пройден весь отрезок [0; 1,5].

Таблица 9.2

i	x_i	y_i	$y_i' = y_i - x_i$	$\Delta y_i = hy_i'$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	0	1,5000	1,5000	0,3750
1	0,25	1,8750	1,6250	0,4062
2	0,50	2,2812	1,7812	0,4453
3	0,75	2,7265	1,9765	0,4941
4	1,00	3,2206	2,2206	0,5552
5	1,25	3,7758	2,5258	0,6314
6	1,50	4,4072		

11 Численное решение дифференциальных уравнений метод Рунге-Кутта

1 Цель работы

1.1 Научиться решать обыкновенные дифференциальные уравнения методом Рунге-Кутта;

1.2 Научиться использовать пакет MathCad для решения ОДУ.

2 Приборы и оборудования

2.1 ПК IBM PC.

2.2 Математический пакет MathCad.

3 Порядок выполнения работы

3.1 Используя математический пакет MathCad решить дифференциальное уравнение 1 $y' = f(x, y)$, с начальными условиями $y(x_0)=y_0$ на отрезке [a,b] с шагом h=0,1:

- методом Рунге-Кутта.

3.2 Используя математический пакет MathCad решить дифференциальное уравнение 2 $y' = f(x, y)$ с начальными условиями y(0)=0 на отрезке [0,1] с шагом h=0,1:

- методом Рунге-Кутта.

Вычисления вести с шестью знаками после запятой. Варианты заданий приведены в приложениях Б, В.

4 Содержание отчета

4.1 Цель работы.

4.2 Выполнение задания.

4.3 Вывод о проделанной работе.

5 Контрольные вопросы

5.1 Какое уравнение называется дифференциальным?

5.2 Что является решением дифференциального уравнения? Что это означает с геометрической точки зрения?

5.3 На какие основные группы подразделяются приближенные методы решения ОДУ?

5.4 В какой форме получается решение ОДУ численными методами?

5.5 Какие встроенные функции MathCad необходимы для решения ОДУ?

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Дифференциальное уравнение решенное методом Рунге-Кутта

$\mathrm{Origin} := 1 \qquad y_1 := 1$

$f(x,y) := x^2 \cdot (y_1)^3 \cdot (\sin(x + y_1))^3$

$Y1 := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 3, 10, f)$

$Y2 := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 3, 20, f)$

$Y3 := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 3, 5, f)$

Значения 10, 20, 5 – n, количество узлов равномерной сетки
0 – a, начало отрезка
3 – b, конец отрезка

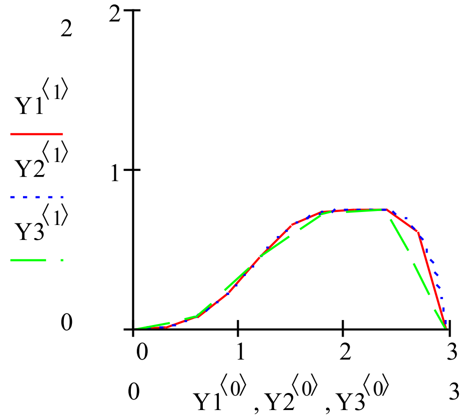
$Y1^{\langle 1 \rangle} =$

	0
0	0
1	0.007
2	0.069
3	0.229
4	0.455
5	0.648
6	0.736
7	0.747
8	0.741
9	0.601
10	-0.096

$Y2^{\langle 1 \rangle} =$

	0
0	0
1	0.001
2	0.007
3	0.028
4	0.069
5	0.136
6	0.229
7	0.339
8	0.455
9	0.562
10	0.648
11	0.706
12	0.736
13	0.746
14	0.747
15	0.747

$$Y3^{\langle 1 \rangle} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.068 \\ 0.455 \\ 0.736 \\ 0.739 \\ -0.095 \end{pmatrix}$$



ПРИЛОЖЕНИЕ Б
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 1

Номер варианта	Уравнения 1	Уравнения 2
1	$y' = 1 + \cos\frac{y}{\sqrt{5}}$ $y_0(1{,}8)=2{,}6$ [1,8;2,8]	$y' = 1+0{,}2y\sin(x)-y^2$
2	$y' = 1 + \cos\frac{y}{3}$ $y_0(1{,}6)=4{,}6$ [1,6;2,6]	$y' = \cos(x+y)+0{,}5(x-y)$
3	$y' = 1 + \cos\frac{y}{\sqrt{10}}$ $y_0(0{,}6)=0{,}8$ [0,6;1,6]	$y' = \frac{\cos x}{x+1} - 0{,}5y^2$
4	$y' = 1 + \cos\frac{y}{\sqrt{7}}$ $y_0(0{,}5)=0{,}6$ [0,5;1,5]	$y' = (1 - y^2)\cos(x)+0{,}6y$
5	$y' = 1 + \cos\frac{y}{\pi}$ $y_0(1{,}7)=5{,}3$ [1,7;2,7]	$y' = 1+0{,}4y\sin(x) - 1{,}5y^2$
6	$y' = 1 + \cos\frac{y}{2{,}25}$ $y_0(1{,}4)=2{,}2$ [1,4;2,4]	$y' = \frac{\cos y}{x+2} + 0{,}3y^2$
7	$y' = 1 + \cos\frac{y}{e}$ $y_0(1{,}4)=2{,}5$ [1,4;2,4]	$y' = \cos(1{,}5x+y)+(x - y)$
8	$y' = 1 + \cos\frac{y}{\sqrt{2}}$ $y_0(0{,}8)=1{,}4$ [0,8;1,8]	$y' = 1 - \sin(x+y) + \frac{0{,}5y}{x+2}$
9	$y' = 1 + \cos\frac{y}{\sqrt{3}}$ $y_0(1{,}2)=2{,}1$ [1,2;2,2]	$y' = \frac{\cos y}{1{,}5+x} + 0{,}1y^2$
10	$y' = 1 + \cos\frac{y}{\sqrt{11}}$ $y_0(2{,}1)=2{,}5$ [2,1;3,1]	$y' = 0{,}6\sin(x) - 1{,}25y^2+1$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 2

Номер варианта	Уравнения 1	Уравнения 2
1	$y' = 1 + \sin\frac{y}{\sqrt{5}}$ $y_0(1,8)=2,6$ [1,8;2,8]	$y' = \cos(2x+y)+1,5(x-y)$
2	$y' = 1 + \sin\frac{y}{3}$ $y_0(1,6)=4,6$ [1,6;2,6]	$y' = 1 - \frac{0,1y}{x+2} - \sin(2x+y)$
3	$y' = 1 + \sin\frac{y}{\sqrt{10}}$ $y_0(0,6)=0,8$ [0,6;1,6]	$y' = \frac{\cos y}{1,25+x} - 0,1y^2$
4	$y' = 1 + \sin\frac{y}{\sqrt{7}}$ $y_0(0,5)=0,6$ [0,5;1,5]	$y' = \cos(1,5x+y)+1,5(x-y)$
5	$y' = 1 + \sin\frac{y}{\pi}$ $y_0(1,7)=5,3$ [1,7;2,7]	$y' = 1+0,8\sin(x) - 2y^2$,
6	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2,8}}$ $y_0(1,4) = 2,2$ [1,4; 2,4]	$y' = 1 - \sin(2x+y) + \frac{0,3y}{x+2}$
7	$y' = x + \sin\frac{y}{e}$ $y_0(1,4) = 2,5$ [1,4; 2,4]	$y' = \frac{\cos y}{1,75+x} - 0,5y^2$
8	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2}}$ $y_0(0,8) = 1,3$ [0,8; 1,8]	$y' = 1 + (1-x)\sin y - (2+x)y$
9	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{3}}$ $y_0(1,1) = 1,5$ [1,1; 2,1]	$y' = (0,8 - y^2)\cos x + 0,3y$
10	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{11}}$ $y_0(0,6) = 1,2$ [0,6; 1,6]	$y' = 1 + 2,2\sin x + 1,5y^2$

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Метод Рунге — Кутта

Метод Рунге — Кутта является одним из методов повышенной точности. Он имеет много общего с методом Эйлера.

Пусть на отрезке [a, b] требуется найти численное решение уравнения

$$y'=f(x, y), \tag{1}$$

с начальным условием

$$y(x_0)=y_0. \tag{2}$$

Разобьем отрезок [a, b] на n равных частей точками $x_i = x_0 + ih$ (i = 0, 1, …, n), где h = (b - a)/n — шаг интегрирования. В методе Рунге — Кутта, так же и в методе Эйлера, последовательные значения y_i искомой функции y определяются по формуле

$$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i. \tag{3}$$

Если разложить функцию y в ряд Тейлора и ограничиться членами до h^4 включительно, то приращение функции Δy можно представить в виде

$$\Delta y = y(x+h) - y(x) = hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(x) + \frac{h^4}{24}y^{IV}(x), \tag{4}$$

где производные y''(x), y'''(x), $y^{IV}(x)$ определяются последовательным дифференцированием из уравнения (1).

Вместо непосредственных вычислений по формуле (4) в методе Рунге — Кутта определяются четыре числа:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x, y), \\ k_2 &= hf\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf(x+h, y+k_3). \end{aligned} \tag{5}$$

Можно доказать, что если числам k_1, k_2, k_3, k_4 придать соответственно вес 1/6; 1/3; 1/3; 1/6, то средневзвешенное этих чисел, т, е.

$$\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 \tag{6}$$

с точностью до четвертых степеней равно значению Δy, вычисленному по формуле (4):

$$\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \tag{7}$$

Таким образом, для каждой пары текущих значений x_i и y_i по формулам (5) определяются значения

$$
\begin{aligned}
&k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i),\\
&k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right),\\
&k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right),\\
&k_4^{(i)} = hf\left(x + h, y + k_3^{(i)}\right).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

по формуле (7) находится

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right).$$

и затем

$$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i.$$

Таблица 9.8

i	x	y	y′=f(x, y)	k=hf(x, y)	Δy
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	x_0 $x_0+\frac{h}{2}$ $x_0+\frac{h}{2}$ x_0+h	y_0 $y_0+\frac{k_1^{(0)}}{2}$ $y_0+\frac{k_2^{(0)}}{2}$ $y_0+k_3^{(0)}$	$f(x_0, y_0)$ $f\left(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{k_1^{(0)}}{2}\right)$ $f\left(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{k_2^{(0)}}{2}\right)$ $f\left(x_0+h, y_0+k_3^{(0)}\right)$	$k_1^{(0)}$ $k_2^{(0)}$ $k_3^{(0)}$ $k_4^{(0)}$	$k_1^{(0)}$ $2k_2^{(0)}$ $2k_3^{(0)}$ $k_4^{(0)}$
					$\frac{1}{6}\sum \Delta y_0$
1	x_1 $x_1+\frac{h}{2}$ $x_1+\frac{h}{2}$ x_1+h	$y_1=y_0+\Delta y_0$ $y_1+\frac{k_1^{(1)}}{2}$ $y_1+\frac{k_2^{(1)}}{2}$ $y_1+k_3^{(1)}$	$f(x_1, y_1)$ $f\left(x_1+\frac{h}{2}, y_1+\frac{k_1^{(1)}}{2}\right)$ $f\left(x_1+\frac{h}{2}, y_1+\frac{k_2^{(1)}}{2}\right)$ $f\left(x_1+h, y_1+k_3^{(1)}\right)$	$k_1^{(1)}$ $k_2^{(1)}$ $k_3^{(1)}$ $k_4^{(1)}$	$k_1^{(1)}$ $2k_2^{(1)}$ $2k_3^{(1)}$ $k_4^{(1)}$
					$\frac{1}{6}\sum \Delta y_1$
2	x_2	$y_2=y_1+\Delta y_1$	…	…	…

Вычисления по методу Рунге — Кутта удобно располагать по схеме, указанной в табл. 9.8. Эта таблица заполняется следующим образом:

I шаг. В столбцы (2) и (3) текущей строки записывают нужные значения x и y. (Если строка первая, то записывают начальные данные x_0 и y_0).

II шаг. Значения x и y текущей строки подставляют в правую часть дифференциального уравнения (1), определяют f(x, y) и записывают в столбец (4) этой же строки.

III шаг. Полученное значение f(x, y) столбца (4) умножают на шаг интегрирования h, вычисляют k = hf (x, y) и записывают в столбец (5) этой же строки.

IV шаг. Найденные значения k умножают на соответствующий коэффициент (на 1, если это k_1 или k_4, или на 2, если это k_2 или k_3), результат записывают в столбец (6) текущей строки.

Шаги I, II, III, IV повторяют для нахождения каждого k в i-м решении.

Результаты шестой строки суммируют, делят на 6, определяют $\Delta y_i = \frac{1}{6}\sum$ и $y_{i+1}=y_i+\Delta y_i$.

Затем все вычисления повторяют, начиная с I шага, до тех пор, пока не будет пройден весь отрезок [a, b].

Метод Рунге — Кутта имеет порядок точности h^4 на всем отрезке [a, b]. Оценка точности метода этого очень затруднительна. Грубую оценку погрешности можно получить с помощью «двойного просчета» по формуле

$$\left|y_i^* - y(x_i)\right| \approx \frac{y_i^* - y_i}{15}, \tag{9}$$

где $y(x_i)$ —значение точного решения уравнения (1) в точке x_i, а y_i^* и y_i — приближенные значения, полученные с шагом h/2 и h.

Если ε — заданная точность решения, то число n (число делений) для определения шага интегрирования h = (b - a)/n выбирается таким образом, чтобы

$$h^4 < \varepsilon \tag{10}$$

Однако шаг расчета можно менять при переходе от одной точки к другой.

Для оценки правильности выбора шага h используют равенство

$$q = \left|\frac{k_2^{(i)} - k_3^{(i)}}{k_1^{(i)} - k_2^{(i)}}\right| \tag{11}$$

где q должно быть равно нескольким сотым, в противном случае шаг h уменьшают

Пример 1. Дано дифференциальное уравнение y' = y - x с начальным условием y (0) = 1,5. Вычислить с точностью до ε = 0,01 решение этого уравнения при x = 1,5. Вычисления провести по методу Рунге — Кутта с двумя запасными знаками.

Решение. Выбираем начальный шаг вычислений h из условия $h^4 < 0{,}01$. Тогда h < 0,3. Для удобства вычислений примем h = 0,25. Весь отрезок интегрирования [0; 1,5] разобьется на шесть равных частей точками $x_0 = 0$; $x_1 =$

0,25; x_2 = 0,50, x_3 = 0,75; x_4 = 1,00; x_5 = 1,25; x_6 = 1,50. Из начальных условий имеем x_0 = 0, y_0 = 1,5. Найдем первое приближение $y_1 = y_0 + \Delta y_0$, где

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}\left(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}\right).$$

Используя формулы (8), получим:

$$k_1^{(0)} = (y_0 - x_0)h = 1.5000 \cdot 0.25 = 0.3750;$$

$$k_2^{(0)} = \left[\left(y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) - \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right]h = [(1.5000 + 0.1875) - 0.125] \cdot 0.25 = 0.3906;$$

$$k_3^{(0)} = \left[\left(y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) - \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right]h = [(1.5000 + 0.1953) - 0.125] \cdot 0.25 = 0.3926;$$

$$k_4^{(0)} = \left[\left(y_0 + k_3^{(0)}\right) - (x_0 + h)\right]h = [(1.5000 + 0.3926) - 0.125] \cdot 0.25 = 0.4106.$$

Следовательно,

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(0.3750 + 2 \cdot 0.3906 + 2 \cdot 0.3926 + 0.4106) = 0.3920$$

и

$$y_1 = 1,5000 + 0,3920 = 1,8920.$$

Дальнейшее решение уравнения представлено в табл. 9.9. Таким образом, окончательно имеем y (1,5) =4,74.

Таблица 9.9

i	x	y	y′=f(x, y)	k=hf(x, y)	Δy
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	0 0,125 0,125 0,25	1,5000 1,6875 1,6953 1,8926	1,5000 1,5625 1,5703 1,6426	0,3750 0,3906 0,3926 0,4106	0,3750 0,7812 0,7852 0,4106
					0,3920
1	0,25 0,375 0,375 0,50	1,8920 2,0973 2,1073 2,3251	1,6420 1,7223 1,7323 1,8251	0,4105 0,4306 0,4331 0,4562	0,4105 0,8612 0,8662 0,4562
					0,4323
2	0,50 0,625 0,625 0,75	2,3243 2,5523 2,5652 2,8093	1,8243 1,9273 1,9402 2,0593	0,4561 0,4818 0,4850 0,5148	0,4561 0,9636 0,9700 0,5148
					0,4841
3	0,75 0,875 0,875 1,00	2,8084 3,0657 3,0823 3,3602	2,0534 2,1907 2,2073 2,3602	0,5146 0,5477 0,5518 0,5900	0,5146 1,0954 1,1036 0,5900

					0,5506
4	1,00 1,125 1,125 1,25	3,3590 3.6539 3,6751 3,9965	2,3590 2,5289 2,5501 2,7465	0,5898 0,6322 0,6375 0,6866	0,5898 1,2644 1,2750 0,6866
					0,6360
5	1,25 1,375 1,375 1,50	3,9950 4,3381 4,3654 4,7426	2,7450 2,9631 2,9904 3,2426	0,6862 0,7408 0,7476 0,8106	0,6862 1,4816 1,4952 0,8106
					0,7456
6	1,50	4,7406			

12 Численное решение дифференциальных уравнений точным методом

1 Цель работы

1.1 Научиться решать обыкновенные дифференциальные уравнения точным методом;

1.2 Научиться использовать пакет MathCad для решения ОДУ.

2 Приборы и оборудования

2.1 ПК IBM PC.

2.2 Математический пакет MathCad.

3 Порядок выполнения работы

3.1 Используя математический пакет MathCad решить дифференциальное уравнение 1 $y' = f(x, y)$, с начальными условиями $y(x_0)=y_0$ на отрезке [a,b] с шагом h=0,1:

- точным методом;

Для сравнения результатов численного решения уравнения указанными методами и значения точного решения необходимо построить графики. Для решения уравнения точным методом, необходимо разделить переменные, записав правую часть в виде f(x,y)=X(x)Y(y).

Вычисления вести с шестью знаками после запятой. Варианты заданий приведены в приложениях Б, В.

4 Содержание отчета

4.1 Цель работы.

4.2 Выполнение задания.

4.3 Вывод о проделанной работе.

5 Контрольные вопросы

5.1 Какое уравнение называется дифференциальным?

5.2 Что является решением дифференциального уравнения? Что это означает с геометрической точки зрения?

5.3 На какие основные группы подразделяются приближенные методы решения ОДУ?

5.4 В какой форме получается решение ОДУ численными методами?

5.5 Какие встроенные функции MathCad необходимы для решения ОДУ?

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Уравнение с разделяющимися переменными

$$f(x,y) := 1 + \cos\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)$$

$$X(x) := 1 \qquad\qquad Y(y) := \frac{1}{1+\cos\left(\frac{y}{\sqrt{}}\right)}$$

$$\int_0^x X(t)\,dt \rightarrow$$

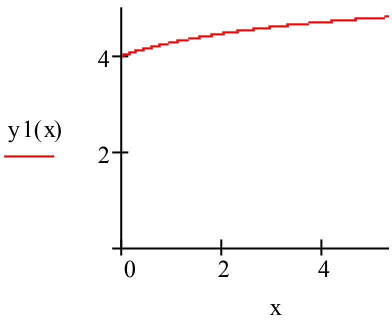
$$\int_4^y Y(t)\,dt \rightarrow \tan\left(\frac{1}{6}\cdot y\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)\cdot 3^{\frac{1}{2}} - \tan\left(\frac{2}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)$$

Чтобы найти выражение для решения, запишите разность вычисленных при интегрировании функций, выделите рамкой у, зайти в меню «Символы» пункт «Переменная» строка «Вычислить».

$$\tan\left(\frac{1}{6}\cdot y\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)\cdot 3^{\frac{1}{2}} - \tan\left(\frac{2}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)\cdot 3^{\frac{1}{2}} -$$

$$2\cdot\operatorname{atan}\left[\frac{1}{3}\cdot\left(\tan\left(\frac{2}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)\cdot 3^{\frac{1}{2}} + x\right)\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right]\cdot$$

$$y1(x) := 2\cdot\operatorname{atan}\left[\frac{1}{3}\cdot\left(\tan\left(\frac{2}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)\cdot 3^{\frac{1}{2}} + x\right)\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right]\cdot$$



ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 1

Номер варианта	**Уравнения 1**
1	$y' = 1 + \cos\frac{y}{\sqrt{5}}$ $y_0(1,8)=2,6$ [1,8;2,8]
2	$y' = 1 + \cos\frac{y}{3}$ $y_0(1,6)=4,6$ [1,6;2,6]
3	$y' = 1 + \cos\frac{y}{\sqrt{10}}$ $y_0(0,6)=0,8$ [0,6;1,6]
4	$y' = 1 + \cos\frac{y}{\sqrt{7}}$ $y_0(0,5)=0,6$ [0,5;1,5]
5	$y' = 1 + \cos\frac{y}{\pi}$ $y_0(1,7)=5,3$ [1,7;2,7]
6	$y' = 1 + \cos\frac{y}{2,25}$ $y_0(1,4)=2,2$ [1,4;2,4]
7	$y' = 1 + \cos\frac{y}{e}$ $y_0(1,4)=2,5$ [1,4;2,4]
8	$y' = 1 + \cos\frac{y}{\sqrt{2}}$ $y_0(0,8)=1,4$ [0,8;1,8]
9	$y' = 1 + \cos\frac{y}{\sqrt{3}}$ $y_0(1,2)=2,1$ [1,2;2,2]
10	$y' = 1 + \cos\frac{y}{\sqrt{11}}$ $y_0(2,1)=2,5$ [2,1;3,1]

ПРИЛОЖЕНИЕ В

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 2

Номер варианта	**Уравнения 1**
1	$y' = 1 + \sin\frac{y}{\sqrt{5}}$ $y_0(1,8)=2,6$ [1,8;2,8]
2	$y' = 1 + \sin\frac{y}{3}$ $y_0(1,6)=4,6$ [1,6;2,6]
3	$y' = 1 + \sin\frac{y}{\sqrt{10}}$ $y_0(0,6)=0,8$ [0,6;1,6]
4	$y' = 1 + \sin\frac{y}{\sqrt{7}}$ $y_0(0,5)=0,6$ [0,5;1,5]
5	$y' = 1 + \sin\frac{y}{\pi}$ $y_0(1,7)=5,3$ [1,7;2,7]
6	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2,8}}$ $y_0(1,4) = 2,2$ [1,4; 2,4]
7	$y' = x + \sin\frac{y}{e}$ $y_0(1,4) = 2,5$ [1,4; 2,4]
8	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2}}$ $y_0(0,8) = 1,3$ [0,8; 1,8]
9	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{3}}$ $y_0(1,1) = 1,5$ [1,1; 2,1]
10	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{11}}$ $y_0(0,6) = 1,2$ [0,6; 1,6]

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Метод последовательных приближений (метод Пикара)

Этот метод возник в связи с доказательством теоремы существования и единственности решения дифференциальных уравнений. Он носит название *метода Пикара.*

Пусть дано уравнение

$$y'=f(x, y) \tag{1}$$

правая часть которого в прямоугольнике $\{|x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b\}$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную по y. Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$x = x_0,\ y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

Интегрируя обе части уравнения от x_0 до x, получим

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx,$$

или

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx. \tag{3}$$

Уравнение (1) заменяется интегральным уравнением (3), в котором неизвестная функция y находится под знаком интеграла. Интегральное уравнение (3) удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и начальному условию (2). Действительно,

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx = y_0.$$

Заменяя в равенстве (3) функцию y значением y_0, получим первое приближение

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx.$$

Затем в уравнении (3) заменяем y найденным значением y_1 получаем второе приближение

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)dx.$$

Продолжая процесс далее, последовательно находим

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2)dx.$$

……………………………

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx.$$

Таким образом, составляем последовательность функций

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots, y_n(x).$$

Справедлива следующая теорема, которую приведем без доказательства.

Теорема. *Пусть в окрестности точки (x_0; y_0) функция f (x, y) непрерывна и имеет ограниченную частную производную* f'_y *(x, y). Тогда в некотором интервале, содержащем точку x_0, последовательность* $\{y_i(x)\}$ *сходится к функции y(x), служащей решением дифференциального уравнения y = f(x, y) и удовлетворяющей условию y (x_0) = y0.*

Оценка погрешности метода Пикара определяется по формуле

$$|y - y_n| \le N^n M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{4}$$

Где M = max |f(x, y)| при (x, y) $\in R_{[a,\ b]}$. а N — постоянная Липшица для области $R_{[a,\ b]}$, равная N = max $|f'_y$ (x, y)|. Величина h для определения окрестности [x_0-h≤ x ≤x_0 + h] вычисляется по формуле

$$h = \min\left(a,\ \frac{b}{M}\right); \tag{5}$$

a и b — границы области R.

Пример. Решить методом Пикара дифференциальное уравнение y' =x^2 + y^2 с начальным условием x_0 = 0, y (x_0) = y_0 = 0.

Решение. Переходим к интегральному уравнению

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} \left(x^2 + y^2\right) dx,$$

или с учетом начальных условий,

$$y = \int_0^x \left(x^2 + y^2\right) dx.$$

Получаем последовательные приближения:

$$y_1 = \int_0^x \left(x^2 + y_0^2\right) dx = \int_0^x \left(x^2 + 0\right) dx = \frac{x^3}{3};$$

$$y_2 = \int_0^x \left(x^2 + y_1^2\right) dx = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{9}\right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63};$$

$$y_3 = \int_0^x \left(x^2 + y_2^2\right) dx = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{9} + \frac{2x^{10}}{189} + \frac{x^{14}}{3969}\right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}.$$

Оценим погрешность третьего приближения по формуле (4):

$$|y - y_n| \le N^n M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Так как функция y′= x^2 + y^2 определена и непрерывна во всей плоскости, то в качестве a и b можно взять любые числа. Для определенности выберем прямоугольник

$$R\{|x - x_0| \le 0.5, |y - y_0| \le 1\},$$

т. е.

$$R\{-0.5 \le x \le 0.5, -1 \le y \le 1\}.$$

Тогда

$$M = \max |f(x, y)| = \max (x^2 + y^2) = 1{,}25;$$

$$N = \max|f'_y(x, y)| = \max|2y| = 2.$$

Поскольку a = 0,5, b/M = 0,8, по формуле (5) имеем

$$h = \min\left(a,\ \frac{b}{M}\right) = 0.5.$$

Решение y будет задано для $-0{,}5 \le x \le 0{,}5$. При n = 3 имеем:

$$|y - y_3| \le \frac{1.25 \cdot 2^3 0.5^4}{4!} = \frac{5}{192}.$$

Полученная оценка погрешности очень грубая, на самом деле погрешность значительно меньше.

Экстраполяционный метод Адамса

При решении дифференциального уравнения методом Рунге — Кутта необходимо производить много вычислений для нахождения каждого y_i. В том случае, когда правая часть уравнения имеет сложное аналитическое выражение, решение такого уравнения методом Рунге — Кутта вызывает большие трудности. Поэтому на практике применяется *метод Адамса*, который не требует многократного подсчета правой части уравнения.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x = x_0, \quad y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Требуется найти решение этого уравнения на отрезке [a, b].

Разобьем отрезок [a, b] на n равных частей точками $x_i = x_0 + ih$ (i = 0, 1, 2, ..., n). Выберем участок $[x_i, x_{i+1}]$ и проинтегрируем дифференциальное уравнение (1); тогда получим

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx,$$

или

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx. \tag{3}$$

Для нахождения производной воспользуемся второй интерполяционной формулой Ньютона (ограничиваясь при этом разностями третьего порядка):

$$y' = y'_i + t\Delta y'_{i-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y'_{i-3}, \tag{4}$$

где $t = (x - x_i)/h$, или

$$y' = y'_i + t\Delta y'_{i-1} + \frac{t^2 + t}{2}\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{t^3 + 3t^2 + 2}{6}\Delta^3 y'_{i-3}. \tag{4'}$$

Подставляя выражение для y' из формулы (4') в соотношение (3) и учитывая, что dx = h dt, имеем

$$\Delta y_i = h\int_0^1 \left(y_i' + t\Delta y_{i-1}' + \frac{t^2+t}{2}\Delta^2 y_{i-2}' + \frac{t^3+3t^2+2}{6}\Delta^3 y_{i-3}' \right)dt = hy_i' + \frac{1}{2}\Delta\left(hy_{i-1}'\right) +$$

$$+\frac{5}{12}\Delta^2\left(hy_{i-2}'\right) + \frac{3}{8}\Delta^3\left(hy_{i-3}'\right). \tag{5}$$

Обозначим в дальнейшем

$$q_i = y_i'h = f(x_i, y_i)\cdot h \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда для любой разности имеем $\Delta^m q_i = \Delta^m\left(y_i'h\right)$ и

$$\Delta y_i = q_i + \frac{1}{2}\Delta q_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{i-3}. \tag{6}$$

По формуле $y_{i+1}=y_i+\Delta y_i$ получаем решение уравнения. Формула (6) носит название *экстраполяционной формулы Адамса*.

Для начала процесса нужны четыре начальных значения y_0, y_1, y_2, y_3 — так называемый *начальный отрезок*, который может быть найден, исходя из начального условия (2) с использованием одного из известных методов. Обычно начальный отрезок решения находится методом Рунге — Кутта.

Зная y_0, y_1, y_2, y_3, можно определить

$$\begin{aligned} q_0 &= hy_0' = hf(x_0, y_0); \quad q_1 = hy_1' = hf(x_1, y_1); \\ q_2 &= hy_2' = hf(x_2, y_2); \quad q_3 = hy_3' = hf(x_3, y_3); \end{aligned} \tag{7}$$

Далее составляется таблица разностей величины q (табл. 9.10).

Таблица 9.10

i	x_i	y_i	Δy_i	$y_i' = f(x_i; y_i)$	$q=h\,y_i'$	Δq_i	$\Delta^2 q_i$	$\Delta^3 q_i$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0	x_0	y_0		$f(x_0, y_0)$	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
1	x_1	y_1		$f(x_1, y_1)$	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	
2	x_2	y_2		$f(x_2, y_2)$	q_2	Δq_2		
3	x_3	y_3	Δy_3	$f(x_3, y_3)$	q_3			
4	x_4	y_4						
5	x_5							
6	x_6							

Метод Адамса заключается в продолжении диагональной таблицы разностей с помощью формулы (6). Используя числа q_3, Δq_2, $\Delta^2 q_1$, $\Delta^3 q_0$, которые располагаются в таблице по диагонали, по формуле (6), полагая в ней n = 3 (последнее известное значение y есть y_3), получают:

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0.$$

Полученное значение Δy_3 вносят в таблицу и находят $y_4 = y_3 + \Delta y_3$. Затем, используя x_4 и найденное значение y_4, находят $f(x_4, y_4)$, q_4, Δq_3, $\Delta^2 q_2$, $\Delta^3 q_1$ т, е. получается новая диагональ. По этим данным находят

$$\Delta y_4 = q_4 + \frac{1}{2}\Delta q_3 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_2 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_1; \quad y_5 = y_4 + \Delta y_4.$$

Таким образом, продолжают таблицу решения, вычисляя правую часть дифференциального уравнения (1) на каждом этапе только один раз.

Для грубой оценки погрешности применяется *принцип Рунге*, который состоит в следующем:

1) находится решение дифференциального уравнения при шаге h;

2) значение шага h удваивается и находится решение при шаге H=2h;

3) вычисляется погрешность метода по формуле

$$\varepsilon = \frac{|\widetilde{y}_n - \widetilde{y}_{2n}|}{2^m - 1}, \tag{8}$$

где $\widetilde{y}_n$ — значение приближенного вычисления при двойном шаге H = 2h, а $\widetilde{y}_{2n}$ — значение приближенного вычисления при шаге h.

Замечание. При вычислении с шагом h предполагается, что на каждом шаге допущена погрешность, пропорциональная h^{m+1}, а с шагом 2h — пропорциональная $(2h)^{m+1}$, если порядок точности метода определен и равен h^m.

Отметим, что в экстраполяционной формуле Адамса (6) третьи конечные разности $\Delta^3 q$ считаются постоянными. Поэтому величину h начального шага вычислений можно определить из неравенства $h^4 < \varepsilon$, где ε — заданная точность решения.

На практике следят за ходом третьих конечных разностей, выбирая h таким, чтобы соседние разности $\Delta^3 q_i$ и $\Delta^3 q_{i+1}$ отличались между собой не более чем на одну-две единицы заданного разряда (не считая запасных знаков).

Пример 1. Вычислить при x = 1,5 с точностью до 0,01 по методу Адамса значение решения дифференциального уравнения $y' = y - x$ с начальным условием $x_0 = 0$, $y_0 = 1,5$. Все вычисления вести с двумя запасными знаками.

Решение. Как и ранее, выбираем h из соотношения $h^4 < 0,01$, т. е. h = 0,25. Начальный отрезок y_0, y_1, y_2, y_3 возьмем из решения примера 1 § 9.6. Для решения этого уравнения составляем две таблицы: основную (табл. 9.11) и вспомогательную (табл. 9.12). Назначение их ясно из самих таблиц.

Таблица 9.11

i	x_i	y_i	Δy_i	$y_i' = f(x_i; y_i)$	$q=h\,y_i'$	Δq_i	$\Delta^2 q_i$	$\Delta^3 q_i$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0	0	1,5000		1,5000	0,3750	0,0355	0,0101	0,0028
1	0,25	1,8920		1,6420	0,4105	0,0456	0,0129	0,0037
2	0,50	2,3243		1,8243	0,4561	0,0585	0,0166	0,0047
3	0,75	2,8084	0,5504	2,0584	0,5146	0,0751	0,0213	
4	1,00	3,3588	0,6356	2,3588	0,5897	0,0964		
5	1,25	3,9944	0,7450	2,7444	0,6861			
6	1,50	4,7394						

Таблица 9.12

i	q_i	$\frac{1}{2}\Delta q_{i-1}$	$\frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2}$	$\frac{3}{8}\Delta^3 q_{i-3}$	Δy_i
3	0,5146	0,0293	0,0054	0,0011	0.5504
4	0,5897	0,0376	0,0069	0,0014	0.6356
5	0,6861	0,0482	0,0089	0,0018	0.7450

Окончательно имеем y(1,5) = 4,74.